

В. В. Ч и ч а г о в (Пермь, ПГУ). **Статистики типа Смирнова–Колмогорова, основывающиеся на несмещенных оценках функции распределения из многопараметрического экспоненциального семейства.**

Для проверки простой гипотезы о виде распределения случайной величины и проверки гипотезы однородности двух независимых повторных выборок предлагается использовать соответственно статистики

$$D_n^* = \sup_{x \in \mathbf{R}^l} \left| \hat{F}(x | S_{n,X}) - F(x, \theta_0) \right|, \quad D_{n,m}^* = \sup_{x \in \mathbf{R}^l} \left| \hat{F}(x | S_{n,X}) - \hat{F}(x | S_{m,Y}) \right|, \quad (1)$$

в которых $\hat{F}(x | S_{n,X})$, $\hat{F}(x | S_{m,Y})$ — несмещенные оценки функции распределения $F(x, \theta_0)$ по независимым повторным выборкам $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_m$.

Приводимое ниже утверждение представляет обобщение аналогичных результатов работы [1] на многопараметрический случай при следующих предположениях.

(A₁). Распределение $F(x, \theta_0)$ принадлежит многопараметрическому экспоненциальному семейству распределений с плотностью распределения вероятностей

$$f(x, \theta) = g(x) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \theta_j T_j(x) + V(\theta) \right\}, \quad x \in G \subset \mathbf{R}^l, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathbf{R}^k \quad (2)$$

по отношению к мере $\mu(\cdot)$, которая может быть либо мерой Лебега, либо считающей мерой; направляющий вектор $T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))^T$ известен.

(A₂). $\mathbf{E} T(X_1) = \mathbf{a}$, ковариационная матрица $\mathbf{D} T(X_1) = \Sigma$ невырождена.

(A₃). Полной достаточной статистикой для параметра θ по выборке $X_1, \dots, X_n$ является $S_{n,X} = \sum_{i=1}^n T(X_i)$. Если X_1 имеет абсолютно непрерывное распределение, то существует такое натуральное N , что при $n \geq N$ случайная величина $(S_{n,X} - n\mathbf{a})/\sqrt{n}$ имеет непрерывную ограниченную плотность распределения. В случае решетчатого распределения X_1 носитель (2) не содержится ни в какой подрешетке решетки $\mathbf{Z}^l$.

(A₄). Для $\theta = \theta_0$ найдется такое $0 \leq \gamma < 0,25$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \int_{E(n,1)} f(x, \theta) d\mu(x) \right] = 0, \quad E(n,1) = \{x: |T(x) - \mathbf{a}| \geq n^\gamma\}.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (A₁)–(A₄). Тогда

1) если элементы выборки $X_1, \dots, X_n$ имеют одну и ту же функцию распределения $F(x, \theta_0)$, то верно соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{n} D_n^* < u \right\} = 2\Phi\left(\frac{u}{\sigma_F}\right) - 1; \quad (3)$$

2) если элементы выборок $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_m$ имеют одну и ту же функцию распределения $F(x, \theta_0)$, то верно соотношение

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}^* < u \right\} = 2\Phi\left(\frac{u}{\sigma_F}\right) - 1. \quad (4)$$

В формулах (3)–(4) $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона,

$$\sigma_F^2 = \sup_{x \in \mathbf{R}^l} \mathbf{E} [I\{X_1 < x, X_2 < x\} (T(X_1) - \mathbf{a})^T \Sigma^{-1} (T(X_2) - \mathbf{a})],$$

где $I\{A\}$ — индикатор A .

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, проект № 05-01-00229.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chichagov V.* Finding distribution of Kolmogorov statistic modification based on unbiased estimator of distribution function from exponential family. — In: Trans. of the XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. Israel: Ort Braude College, 2007, p. 60–63.