

Е. А. Савинов, С. Я. Шатских (Самара, СамГУ). **Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями устойчивой меры на гильбертовом пространстве.**

Изучается схема серий асимптотически независимых случайных величин, порожденных конечномерными условными распределениями σ -аддитивной устойчивой меры на гильбертовом пространстве. Для нормированных сумм таких серий в случае, когда размерность условных распределений стремится к бесконечности, установлена слабая сходимость к гауссовскому распределению. Доказана возможность обобщения результата на более широкие классы мер и пространств.

Пусть $\mathbf{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbf{H})$; μ — σ -аддитивная устойчивая мера на $\mathbf{H}$ с характеристическим функционалом

$$\Psi(y) = \exp \left\{ - \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \langle y, e_j \rangle^2 \right)^{\alpha/2} \right\}, \quad y \in \mathbf{H},$$

и показателем $\alpha \in (0, 2)$, где $\lambda_j > 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$ (см., например, [1]).

Рассматривая линейные функционалы $\langle \cdot, e_1 \rangle, \dots, \langle \cdot, e_n \rangle$ в качестве случайных величин, введем для них функцию распределения

$$F_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) := \mu\{h \in \mathbf{H}: \langle h, e_1 \rangle \leq x_1, \dots, \langle h, e_n \rangle \leq x_n\}.$$

Кроме того, рассмотрим $F_{i|1, \dots, \widehat{i}, \dots, n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$ — условную функцию распределения случайной величины $\langle h, e_i \rangle$ относительно системы случайных величин $\langle h, e_1 \rangle, \dots, \langle h, e_i \rangle, \dots, \langle h, e_n \rangle$, где $\widehat{}$ — знак пропуска элемента.

Будем рассматривать схему серий

$$X_i^{(n)} := \Phi^{-1} \left(F_{i|1, \dots, \widehat{i}, \dots, n}(X_i | X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n) \right), \quad i=1, \dots, n, \quad n=1, 2, \dots, \quad (*)$$

где $X_i := \langle x, e_i \rangle$, $x \in \mathbf{H}$, $\Phi(\cdot)$ — (0,1)-гауссовское распределение.

Лемма. Для любого $n \in \mathbf{N}$ случайные величины n -й серии $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ являются зависимыми (0,1)-гауссовскими. Однако для любого натурального $m = 1, \dots, n$ и набора индексов $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ выполняется равенство $\mathbf{M}\{X_{i_1}^{(n)}, X_{i_2}^{(n)}, \dots, X_{i_m}^{(n)}\} = 0$.

Основным результатом работы, представленной данным сообщением, является следующее утверждение.

Теорема. Для любого $u \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} \leq u \right\} = \Phi(u).$$

Следствие. Если $H_0(t)$ — симметричная абсолютно непрерывная функция распределения с дисперсией σ_0^2 и конечным четвертым моментом, то для схемы серий случайных величин

$$Y_i^{(n)} := H_0^{-1} \left(F_{i|1, \dots, \widehat{i}, \dots, n}(X_i | X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n) \right)$$

для любого $u \in \mathbf{R}$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i^{(n)} \leq u \right\} = \Phi(u).$$

Результаты данной работы для частного случая меры Коши в гильбертовом пространстве ранее были получены в работе [3].

Доказанная теорема переносится на следующие случаи: 1) μ — непрерывная смесь гауссовских мер на локально выпуклом пространстве; 2) μ — симметрические распределения на пространстве последовательностей $\mathbf{R}^\infty$.

Случайные величины вида (*) неоднократно являлись объектом исследований в связи с изучением свойств *преобразований независимости* негауссовских случайных величин (см., например, [4], [5]). В частности, в работе [1] (см. также [2]) было установлено, что при $n \rightarrow \infty$ система случайных величин (*) является асимптотически независимой и для нее имеет место усиленный закон больших чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шатский С. Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений. — Изв. РАЕН, сер. МММИУ, 1999, т. 3, № 3, с. 43–81.
2. Шатский С. Я. Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 292–311.
3. Савинов Е. А., Шатский С. Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями σ -аддитивной меры Коши. — Вестник СамГУ, 2005, № 6 (40), с. 51–59.
4. Rosenblatt M. Remarks on multivariate transformation. — Ann. Math. Stat., 1952, v. 23, p. 470–472.
5. Шатский С. Я. Об одном варианте преобразования независимости. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 815–816.