Ю. В. Прохоров, О. В. Висков, В. И. Хохлов (Москва, МИ РАН). **Аналоги неравенства Чернова для гамма-распределения.**

У так называемого изопериметрического неравенства Чернова, установленного им в [1] для нормального распределения, имеется ряд аналогов, полученных в работах [2-4] для таких классических дискретных распределений, как пуассоновское, биномиальное и отрицательное биномиальное (распределение Паскаля).

Работа, представленная данным сообщением, расширяет список аналогов неравенства Чернова за счет одного из классических абсолютно непрерывных распределений, а именно, гамма-распределения, имеющего плотность (см., например, [5, с. 127–128])

$$p(x;\,\gamma_a) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} \int_0^x e^{-y}\, y^a\, dy, \qquad a > -1, \tag{1}$$

где γ_a обозначает случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметром a, а $\Gamma(\cdot)$ есть гамма-функция Эйлера.

Обозначим $\mathcal{F}$ класс $\{f(x)\colon f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_\alpha L_\alpha^{(a)}(x)\}$ и $\mathcal{G}$ подкласс $\{g(x)\colon g(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_\alpha L_\alpha^{(a)}(x), g_\alpha g_\beta \geqslant 0$ для всех $\alpha, \beta = 1, 2, \dots\}$ функций, допускающих (на всей числовой прямой) представления в виде рядов Фурье по системе $\{L_\alpha^{(a)}(x), a > -1, \alpha = 1, 2, \dots\}$ многочленов Лагерра, образующих ортонормированную систему относительно гамма-распределения (1), т. е. систему, для которой $\mathbf{M}\, L_\alpha^{(a)}(\gamma_a)\, L_\beta^{(a)}(\gamma_a) = \delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$). Ненормированный вариант этой ортогональной системы приведен, например, в [6, с. 110]. Класс $\mathcal{F}$ содержит в себе, например, все многочлены любой степени $\alpha = 0, 1, 2, \dots$

Теорема. *Для произвольной функции* $f(x) \in \mathcal{F}$

$$\frac{\mathbf{D}\, f(\gamma_a)}{\mathbf{D}\,\gamma_a} \leqslant \mathbf{M}\Bigl(W\, f(\gamma_a)\Bigr)^2 \leqslant \mathbf{D}\, f(\gamma_a), \qquad\qquad a \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{D}\, f(\gamma_a) \leqslant \mathbf{M}\Bigl(W\, f(\gamma_a)\Bigr)^2 \leqslant \frac{\mathbf{D}\, f(\gamma_a)}{\mathbf{D}\,\gamma_a}, \qquad -1 < a \leqslant 0, \tag{3}$$

где $W\, f(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x)$.

Для произвольной функции $g(x) \in \mathcal{G}$

$$\frac{\mathbf{D}\, g(\gamma_a)}{\mathbf{D}\,\gamma_a} \leqslant \mathbf{M}\Bigl(g'(\gamma_a)\Bigr)^2, \tag{4}$$

причем равенства в левых частях (2) *и* (3), *а также в* (4), *достигаются тогда и только тогда, когда* $f(\cdot)$ *и* $g(\cdot)$ *соответственно — линейные функции своего аргумента. Все неравенства обращаются в равенства на показательном распределении, соответствующем случаю* $a = 0$.

З а м е ч а н и е. В формулах (2)–(4) значения $\mathbf{D}\,\gamma_a$ можно заменить на $a+1$, поскольку у гамма-распределения $\mathbf{D}\,\gamma_a = \mathbf{M}\,\gamma_a = a+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. следует схеме доказательства сходных теорем в [3] или [4], причем принятая ниже система обозначений, а также определение факториально-степенных многочленов для сокращения изложения не приводятся; они дословно заимствованы из [6]. Используются вновь полученное представления

$$L_\alpha^{(a)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha![\alpha+a]^\alpha}}\, \widehat{L}_\alpha^{(a)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha![\alpha+a]^\alpha}} \Bigl([\alpha+a]-x\Bigr)^\alpha$$

ортонормированных многочленов Лагерра в виде факториально-степенных многочленов (биномов). Применением техники факториально-степенного формализма из этого представления нетрудно вывести соотношения

$$W\,\widehat{L}_{\alpha}^{(a)}(x) = \alpha\,\widehat{L}_{\alpha-1}^{(a)}(x), \qquad \frac{d}{dx}\widehat{L}_{\alpha}^{(a)}(x) = -\sum_{\nu=1}^{\alpha}[\alpha]^{\nu}\widehat{L}_{\alpha-\nu}^{(a)}(x).$$

Остается подсчитать математические ожидания произведений рядов Фурье для функций $W\,f(x)$ и $\frac{g}{dx}$:

$$\mathbf{M}\Big(W\,f(\gamma_a)\Big)^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha+1}f_{\alpha}^2,$$

$$\mathbf{M}\Big(g'(\gamma_a)\Big)^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}g_{\alpha}^2C_{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1,\alpha<\beta}^{\infty}g_{\alpha}g_{\beta}C_{\alpha}, \quad \text{где} \quad C_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{[\alpha]^{\nu}}{[\alpha+a]^{\nu}} = \frac{\alpha}{1+a},$$

и оценить их.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chernoff H.* A note on an inequality involving the normal distribution. — Ann. Probab., 1981, v. 9, p. 533–535.
2. *Висков О. В.*, *Прохоров Ю. В.*, *Хохлов В. И.* Пуассоновский аналог неравенства Чернова. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 1, с. 128–129.
3. *Прохоров Ю. В.*, *Висков О. В.*, *Хохлов В. И.* Биномиальные аналоги неравенства Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 592–594.
4. *Прохоров Ю. В.*, *Висков О. В.*, *Хохлов В. И.* Аналоги неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 379–382.
5. *Прохоров А. В.* Гамма-распределение. — В энциклопедии: Теория вероятностей и математическая статистика./ Под ред. Ю. В. Прохорова и др. М.: БРЭ, 1999.
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962, 500 с.
7. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–592.