

**И. В. Павлов, Э. А. Пилосян** (Ростов-на-Дону, РГСУ; Сочи, СГУТиКД). **Интерполяционные свойства мартингалов на сепарабельных измеримых пространствах.**

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — некоторое вероятностное пространство с сепарабельной  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}$ , а совокупность событий  $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k=1}^\infty$  — фиксированная сепаранта  $\mathcal{F}$  (т. е.  $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$ ). Сконструируем возрастающий поток  $\sigma$ -алгебр  $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ , где  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ , следующим образом. Введем нестандартную терминологию. Будем называть событие  $A$  *тривиальным* относительно события  $B$ , если  $P\{AB\} = 0$  или 1 и  $P\{A\bar{B}\} = 0$  или 1. В противном случае будем говорить, что  $A$  *нетривиально* относительно  $B$ . Пусть  $\tau = (k_1, k_2, \dots)$  — произвольная перестановка множества натуральных чисел  $1, 2, \dots$ . Рассмотрим конечный набор событий  $\mathcal{D}_1 = \{d_{k_1}, \dots, d_{k_l}\}$ , удовлетворяющий условиям: события  $D_{k_1}, \dots, D_{k_{l-1}}$  тривиальны относительно  $\Omega$ , а событие  $D_{k_l}$  нетривиально относительно  $\Omega$ . Положим  $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{D}_1)$ . Пусть  $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{D}_n)$  построена, где  $\mathcal{D}_n = \{D_{k_1}, \dots, D_{k_m}\}$ . Рассмотрим такие события  $D_{k_{m+1}}, D_{k_{m+2}}, \dots, D_{k_r}$ , что каждое из событий  $D_{k_{m+1}}, D_{k_{m+2}}, \dots, D_{k_{r-1}}$  тривиально относительно хотя бы одного из событий  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$ , а  $D_{k_r}$  нетривиально относительно всех событий из  $\mathcal{F}_n$ . Полагаем  $\mathcal{D}_{n+1} = \{D_{k_1}, \dots, D_{k_r}\}$  и  $\mathcal{F}_{n+1} = \sigma(\mathcal{D}_{n+1})$ . Таким образом, фильтрация  $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  построена. Ясно, что  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n$ . Полученную фильтрацию  $\mathbf{F}$  будем называть *бинарно-хааровской интерполирующей фильтрацией* (БХИФ). Ясно, что для любого  $n = 0, 1, \dots$  мера  $P$  атомична на  $\mathcal{F}_n$  с общим числом атомов  $d_n$ , где  $n+1 \leq d_n \leq 2^n$ . Если  $d_n = 2^n$  для любого  $n = 0, 1, \dots$ , то такую интерполирующую фильтрацию будем называть *бинарной* (БИФ). Если  $d_n = n+1$  для любого  $n = 0, 1, \dots$ , то такую интерполирующую фильтрацию будем называть *хааровской* (ХИФ). Хааровскую интерполирующую фильтрацию будем называть *специальной хааровской интерполирующей фильтрацией* (СХИФ), если для любого  $n = 0, 1, \dots$  при переходе от момента времени  $n$  к моменту времени  $n+1$  на два атома дробится тот атом  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$ , который стал результатом аналогичного дробления на предыдущем шаге.

Пусть  $a > 0$  — действительное число. Рассмотрим на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  одношаговый дисконтированный финансовый рынок с одним типом акций. Пусть  $Z_0 = a$  — дисконтированная цена акции в начальный момент времени, а случайная величина  $Z$  — дисконтированная цена акции в финальный момент времени ( $Z > 0$   $P$ -п. н.). Обозначим  $\mathcal{P}$  множество вероятностных мер на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , эквивалентных мере  $P$ , а множество мартингалов этого рынка, принадлежащих  $\mathcal{F}$ , обозначим  $\mathcal{P}(Z)$ . Предположим, что данный рынок безарбитражен, и зафиксируем  $P^* \in \mathcal{P}(Z)$ . Обозначим  $Z_n$  какую-либо версию условного математического ожидания  $\mathbf{E}^{P^*}[Z|\mathcal{F}_n]$  и рассмотрим процесс  $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ . Множество мартингалов мер этого процесса (принадлежащих  $\mathcal{P}$ ) обозначим  $\mathcal{P}(\mathbf{Z}, \mathbf{F})$ . Будем говорить, что мера  $P^*$  удовлетворяет свойству *бинарно-хааровской единственности* — СБХЕ (соответственно, *бинарной единственности* — СБЕ, *хааровской единственности* — СХЕ, *усиленному свойству хааровской единственности* — УСХЕ), если для некоторой перестановки  $\tau$  множества натуральных чисел, порождающей БХИФ (соответственно, БИФ; ХИФ; СХИФ)  $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ , выполняется соотношение  $\mathcal{P}(\mathbf{Z}, \mathbf{F}) = \{P^*\}$ . Будем говорить, что мера  $P^*$  удовлетворяет свойству *универсальной бинарно-хааровской единственности* — СУБХЕ (соответственно, *универсальной бинарной единственности* — СУБЕ, *универсальной хааровской единственности* — СУХЕ, *ослабленному свойству универсальной хааровской единственности* — ОСУХЕ), если для любой перестановки  $\tau$  множества натуральных чисел, порождающей БХИФ (соответственно, БИФ; ХИФ; СХИФ)  $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ , выполняется соотношение  $\mathcal{P}(\mathbf{Z}, \mathbf{F}) = \{P^*\}$ .

Сравним описанную выше конструкцию с моделями интерполяции, изученными в работах [1–4].

1. В цитируемых работах предполагалось, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$  порождена разбиением  $\Omega$  на не более чем счетное число атомов. Этот случай (в несколько обобщенном

виде) мы получаем, если  $P$  чисто атомична на исходной  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ . При нашем подходе  $P$  — произвольная вероятностная мера на произвольной сепарабельной  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ .

2. В настоящем докладе возможности интерполирования определяются выбором сепаранты  $\mathcal{D}$  (что отсутствует в цитируемых работах). Например, если  $P$  чисто атомична на  $\mathcal{F}$ , а  $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k=1}^\infty$  представляет собой множество атомов  $\mathcal{F}$ , то интерполирующими фильтрациями  $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  могут быть только СХИФ. Таким образом, здесь могут исследоваться лишь свойства УСХЕ и ОСУХЕ. Если же в качестве  $\mathcal{D}$  взять алгебру, порожденную  $\{D_k\}_{k=1}^\infty$  (это будет тоже сепаранта), то в данном случае реализуются СХИФ и некоторые типы ХИФ и БХИФ (но не все, если иметь в виду определения из [3]).

В настоящем докладе для некоторых типов вероятностных пространств  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и различных сепарант  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$  получены аналогичные [1–4] результаты о введенных интерполяционных свойствах мартингальных мер  $P^*$ , а также изучено свойство УСХЕ, не затронутое в цитируемых работах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачева М. Н., Павлов И. В.* О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. — *Успехи матем. наук*, 2002, т. 57, в. 3, с. 143–144.
2. *Богачева М. Н., Павлов И. В.* О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. — *Известия ВУЗов, Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2002, № 3, с. 16–24.
3. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Интерполяция мартингалов относительно хааровских фильтраций. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2004, т. 11, в. 1, с. 73–82.
4. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2004, т. 11, в. 3, с. 506–508.