

В. И. А р к и н, А. Д. С л а с т н и к о в (Москва, ЦЭМИ РАН). **Модель выхода из бизнеса в условиях неопределенности с учетом налогов.**

В работе, представленной данным сообщением, изучается проблема выхода из бизнеса для действующего предприятия, текущая прибыль которого описывается случайным процессом. Приводятся формулы для оптимального момента прекращения деятельности предприятия, ожидаемых приведенных чистых доходов, а также выплачиваемых налогов. Проведено исследование зависимости приведенных налоговых выплат от ставки налога. Показано, что эта зависимость может носить немонотонный характер.

1. Постановка задачи. В качестве объекта исследования рассматривается функционирование промышленного предприятия, текущий поток прибыли которого описывается случайным процессом $(Z_t, t \geq 0)$, заданным на стохастическом базисе $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$.

Поскольку прибыль в какие-то моменты времени может стать отрицательной (предприятие становится убыточным), в каждый момент времени возникает дилемма: продолжать бизнес (дальнейшее функционирование предприятия) в надежде на то, что прибыль снова станет положительной, или завершить деятельность и выйти из бизнеса, связанного с данным предприятием.

Если τ есть момент прекращения деятельности предприятия, то ожидаемые приведенные чистые доходы предприятия описываются формулой

$$V_\tau(z) = \mathbf{E}^z \left(\int_0^\tau (1 - \gamma) Z_t e^{-\rho t} dt + L e^{-\rho \tau} \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}^z$ означает математическое ожидание для процесса Z_t , начинающегося в точке $Z_0 = z$, γ — ставка налога на прибыль, ρ — норма дисконта, а L — так называемое ликвидационное сальдо (связанное с процессом ликвидации предприятия).

Ликвидационное сальдо (объекта) определяется как разность между выручкой от продажи отдельных частей объекта (при его ликвидации) и затратами, связанными с демонтажом объекта, извлечением из него пригодных для продажи частей, восстановлением территории. Ликвидационное сальдо обычно положительно, хотя может быть и отрицательным (в частности, для нефтяных месторождений). Таким образом, мы считаем, что в момент прекращения деятельности предприятия его владелец получает единовременный чистый доход в размере ликвидационного сальдо L (точнее, доходы или расходы в зависимости от знака L).

Проблема оптимального выхода из бизнеса состоит в том, чтобы наблюдая за потоком прибыли, найти такой момент прекращения деятельности предприятия τ , когда приведенные чистые доходы предприятия V_τ (см. (1)) будут максимальны, т. е.

$$V_\tau(z) \rightarrow \max_{\tau}, \quad (2)$$

где максимум берется по всем марковским (относительно потока $\mathcal{F}_t$) моментам τ . Задача (2) представляет собой задачу оптимальной остановки случайного процесса Z_t для функционала (1).

2. Основные предположения и результаты. Мы предполагаем, что текущая прибыль Z_t описывается однородным (по времени) диффузионным процессом со стохастическим дифференциалом $dZ_t = a(Z_t)dt + b(Z_t)dw_t$ и начальным условием $Z_0 = z$.

Из строго марковского свойства диффузионных процессов легко вывести, что для любого марковского момента τ

$$V_\tau(z) = (1 - \gamma)f(z) + \mathbf{E}^z [L - (1 - \gamma)f(Z_\tau)] e^{-\rho \tau}, \quad (3)$$

где $f(z) = \mathbf{E}^z \int_0^\infty Z_t e^{-\rho t} dt$. Таким образом, задачу оптимальной остановки (2) с интегральным функционалом (1) можно свести к задаче с терминальным функционалом (3).

Теперь для решения задачи оптимальной остановки (2) можно воспользоваться вариационным подходом (см. [1]).

Для любого уровня p из множества значений Y процесса Z_t будем обозначать $\tau_p = \inf\{t \geq 0 : Z_t \leq p\}$ — первый момент выхода процесса Z_t из области $G_p = \{y \in R : y > p\}$. Тогда

$$V^p(z) := V_{\tau_p}(z) = (1 - \gamma)f(z) + [L - (1 - \gamma)f(p)] \mathbf{E}^z \exp\{-\rho\tau_p\}.$$

Нетрудно установить (используя формулу Фейнмана–Каца), что $\mathbf{E}^z \exp\{-\rho\tau_p\} = \varphi(z)/\varphi(p)$, при $p \leq z$, и 1, при $p > z$, где $\varphi(x)$ есть неотрицательное невозрастающее фундаментальное решение дифференциального уравнения $\frac{1}{2}b^2(x)y''(x) + a(x)y'(x) - \rho y(x) = 0$ (подобную формулу можно найти, например, в [2]).

Таким образом, задача оптимальной остановки (2) в классе марковских моментов $\{\tau_p, p \in Y\}$ сводится к решению экстремальной (вариационной) задачи

$$V^p(z) \rightarrow \max_{p \in Y}. \quad (4)$$

Пусть $h(p) = [L - (1 - \gamma)f(p)]/\varphi(p)$.

Теорема 1. Пусть p^* есть точка строгого максимума функции $h(p)$ (т. е. $h(p^*) > h(p)$ при $p \neq p^*$) и, кроме того, $h(p)$ при $p \leq p^*$. Тогда:

- 1) для любого $z \in Y$ максимум в задаче (4) достигается при $p = p^*$ (и тем самым не зависит от z);
- 2) оптимальным моментом остановки в задаче (2) по классу марковских моментов $\{\tau_p, p \in Y\}$ будет $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : Z_t \leq p^*\}$.
- 3) оптимальное значение функционала в задаче (2) по классу марковских моментов $\{\tau_p, p \in Y\}$ равно

$$V^*(z) = \begin{cases} L, & \text{при } z \leq p^*, \\ (1 - \gamma)f(z) + h(p^*)\varphi(z), & \text{при } z > p^*. \end{cases}$$

(Близкие результаты можно найти в [3].)

Отметим, что если максимум функции $h(p)$ не достигается на множестве Y , то формально можно полагать p^* равным $\sup Y$ или $\inf Y$. В этом случае оптимальный момент выхода будет вырожденным, т. е. $\tau^* = 0$ при $p^* = \sup Y$ или $\tau^* = \infty$ при $p^* = \inf Y$ для всех начальных состояний процесса прибыли z .

Теперь, зная оптимальный момент выхода из бизнеса, можно вычислить оптимальное значение ожидаемых приведенных налогов, которые выплачивает предприятие $T^*(z) = \mathbf{E}^z(\int_0^{\tau^*} \gamma Z_t e^{-\rho t} dt)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда:

$$T^*(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leq p^* \\ \gamma[f(z) - f(p^*)\varphi(z)/\varphi(p^*)], & \text{при } z > p^*. \end{cases}$$

3. Исследование зависимости от ставки налога. Поскольку изучать зависимость оптимального момента выхода из бизнеса от ставки налога для общих процессов прибыли Z_t весьма затруднительно, остановимся на двух важных частных случаях.

а) *Геометрическое броуновское движение (ГБД) и постоянные издержки.* Текущая прибыль описывается как $Z_t = \pi_t - c$, где π_t — процесс геометрического броуновского движения с темпом роста α и волатильностью σ (т.е. $d\pi_t = \alpha\pi_t dt + \sigma\pi_t dw_t$), а $c > 0$ — постоянные текущие затраты.

При этом оптимальный уровень выхода (для процесса π_t) равен

$$\pi^* = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\rho - \alpha}{\rho} \left(c + \frac{L\rho}{1 - \gamma} \right),$$

где β есть отрицательный корень квадратного уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho = 0$.

б) *Арифметическое броуновское движение (АБД)*. Процесс Z_t описывается как $Z_t = z + \alpha t + \sigma w_t$. В этом случае оптимальный уровень выхода равен

$$p^* = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\rho} + \frac{L\rho}{1 - \gamma},$$

где β есть отрицательный корень квадратного уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \alpha\beta - \rho = 0$. Аналогичные формулы (без учета налога и ликвидационного сальдо L) можно найти, например, в [4]. Исходя из них, можно посчитать также оптимальные приведенные чистые доходы V^* и приведенные налоги T^* .

Отметим, прежде всего, что оптимальный (для выхода) уровень прибыли может быть отрицательным. Это означает, что предприятие, попадая в убытки, не должно сразу же прекращать свою деятельность, а должно несколько подождать, надеясь на то, что текущая прибыль с некоторой вероятностью станет положительной. Такая ситуация возникает из-за стохастического характера текущей прибыли, когда ликвидационное сальдо L не превышает некоторой (положительной) величины L_1 , зависящей от параметров прибыли, дисконта и ставки налога.

Характер зависимости оптимального уровня выхода $p^* = p^*(\gamma)$ от ставки налога γ существенно определяется знаком величины ликвидационного сальдо L . В общем случае эта зависимость описывается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть $p^*(\gamma)$ является внутренней точкой области значений Y при $\gamma \in \Gamma \subset [0, 1]$. Предположим, что функции $f(p)$, $\varphi(p)$ дифференцируемы и, кроме того, $\log \varphi(p)$ выпукла, а $f(p)$ возрастает и выпукла. Тогда функция $p^*(\gamma)$ на множестве Γ является неубывающей при $L > 0$ или невозрастающей при $L < 0$.

Доказательство. Как нетрудно видеть, $p^*(\gamma) = q^*(l)$, где $l = l(\gamma) = L/(1 - \gamma)$, а q^* есть точка строгого максимума (по q) функции $[l - f(q)]/\varphi(q)$. Иными словами, оптимальный уровень p^* зависит от ставки налога γ лишь через выражение $l(\gamma)$.

Поскольку $p^* \in \text{int } Y$ при $\gamma \in \Gamma$, выполняется условие оптимальности первого порядка, т. е. q^* является корнем уравнения:

$$f(q) - \frac{\varphi(q)}{\varphi'(q)} f'(q) = l. \quad (7)$$

В силу условий теоремы левая часть (7) является возрастающей (по q) функцией. Отсюда следует, что корень $q^*(l)$ монотонно возрастает по l .

В свою очередь, $l(\gamma)$ возрастает при $L > 0$ и убывает при $L < 0$.

Теперь утверждение теоремы вытекает из суперпозиции $p^*(\gamma) = q^*(l(\gamma))$.

Заметим, что при нулевых L оптимальный момент выхода из бизнеса вообще не зависит от ставки налога, что легко видно еще из формул (1) и (2).

Отметим, что условия теоремы 3 выполняются для описанных выше процессов геометрического и арифметического броуновских движений. В этих случаях $f(p) = (p + c)/(\rho - \alpha) - c/\rho$, $\varphi(p) = p^\beta$ (для ГБД) и $f(p) = p/\rho + \alpha/\rho^2$, $\varphi(p) = \exp\{\beta p\}$ (для АБД), где соответствующие β определены выше в п. 3 а) и б).

Таким образом, если ликвидационное сальдо предприятия положительно, т. е. предприятие имеет положительную прибыль от процесса ликвидации (например, за счет продажи своих фондов), то рост налоговой ставки стимулирует инвестора к

более раннему выходу из бизнеса, что вполне укладывается в рамки интуитивных представлений.

Если ликвидационное сальдо отрицательно, т. е. предприятие терпит убытки в момент выхода из бизнеса («плата за выход»), то рост налоговой ставки, снижая уровень выхода, стимулирует предприятие к более длительному продолжению своей деятельности и откладыванию выхода из бизнеса.

Для объяснения этого парадоксального на первый взгляд феномена (рост налогов поощряет предприятие продолжать свою деятельность!) следует, по-видимому, обратиться к принципам взимания налогов предприятия при наличии убытков. Как уже отмечалось, оптимальный уровень выхода p^* становится отрицательным при $L < 0$ (по крайней мере, для упомянутых выше процессов прибыли ГБД и АБД), тем самым какое-то время перед выходом предприятие будет нести убытки. Как известно, в некоторых налоговых системах разрешен перенос убытков назад (в ограниченном виде). Это, в частности, означает, что предприятие в период убытков получает налоговое возмещение от налоговых властей (с определенными оговорками и ограничениями). Такая «компенсация» убытков ослабляет стимулы предприятия к прекращению своей деятельности.

Если рассмотреть крайний случай, когда вся прибыль взимается в виде налога (т. е. $\gamma = 1$), то при отрицательном L предприятию также выгодно все время продолжать свое функционирование (получая нулевую чистую прибыль), чем выйти из бизнеса (и получив в момент выхода убытки).

Что касается ожидаемых приведенных налоговых поступлений $T^* = T^*(\gamma)$, то их зависимость от ставки налога γ (при положительных ликвидационных сальдо) носит немонотонный характер. А именно, найдутся такие границы $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, что $T^*(\gamma)$ возрастает при $\gamma < \gamma_1$, убывает при $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ и обращается в нуль при $\gamma > \gamma_2$. Заметим, что участок «обнуления» T^* соответствует описанной выше ситуации, когда предприятие никогда не будет выходить из бизнеса (при γ близких к 1). Сами границы γ_1 и γ_2 при этом будут зависеть от параметров процесса прибыли, дисконта и величины ликвидационного сальдо.

И, наконец, для отрицательных L ожидаемые приведенные налоговые поступления T^* будут монотонно возрастать с ростом налоговой ставки γ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 05-06-80354, 07-01-00541).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аркин В.И., Сластников А.Д., Аркина С.В. Инвестирование в условиях неопределенности и задачи оптимальной остановки. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 1, с. 3–33.
2. Бородин А., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. СПб.: Лань, 2000.
3. Alvarez L. H. R. Reward functionals, salvage values, and optimal stopping. — Mathematical Methods of Operations Research, 2001, v. 54, p. 315–337.
4. Peura S. Essays on Corporate Hedging. Research Reports Kansantaloustieteen laitoksen tutkimuksia, Nro 97:2003. Helsinki: University of Helsinki, 2003.