

А. Н. Т и м а ш е в (Москва, ТВП). **Случайные отображения с кратностями вершин из заданного множества.**

Рассматривается класс всех однозначных отображений n -элементного множества в себя, кратности вершин графов которых принимают значения из заданного непустого множества A целых неотрицательных чисел. Всюду далее будем предполагать, что A фиксированно (т. е. выбор множества A не зависит от n). Пусть $M_n(A)$ — число отображений в этом классе, тогда

$$M_n(A) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \in A}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}. \quad (1)$$

Справедливость формулы (1) следует из того, что число отображений множества с n занумерованными вершинами в себя, графы которых имеют кратности вершин $k_1, k_2, \dots, k_n$, при условии $k_1 + k_2 + \dots + k_n = n$ равно $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ [1; с. 18].

Положим

$$P_A(z) = \sum_{k \in A} \frac{z^k}{k!}, \quad (2)$$

тогда из (1) следует, что

$$M_n(A) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{(P_A(z))^n}{z^{n+1}} dz. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) осуществляется по пробегаемой в положительном направлении окружности с центром в нуле.

В [2] установлено, что если $0 \in A$, $A \neq \{0; 1\}$,

$$A \neq \{0\}, \quad \text{н. о. д.} \quad \{k \mid k \in A\} = 1, \quad (4)$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$M_n(A) = \frac{(n/e)^n}{\sqrt{f_A(z_0)}} (P_A(z_0))^n z_0^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (5)$$

где $z = z_0$ есть единственный положительный корень уравнения $zP'_A(z)(P_A(z))^{-1} = 1$, величина $P_A(z)$ определяется согласно (2) и $f_A(z_0) = z_0^2 P''_A(z_0)(P_A(z_0))^{-1} > 0$.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ и условиях (4) справедливо равенство (5) с заменой остаточного члена вида $O(n^{-1})$ на $Bn^{-1} + O(n^{-2})$, где

$$B = -\frac{5(P'''_A(z_0))^2 P_A(z_0)}{24(P''_A(z_0))^3} + \frac{(P^{(IV)}_A(z_0) + 2z_0^{-1}P'''_A(z_0))P_A(z_0)}{8(P''_A(z_0))^2} + \frac{P_A(z_0)}{8z_0^2 P''_A(z_0)} - \frac{7}{24}.$$

З а м е ч а н и е 1. В приведенных формулах

$$P_A^{(j)}(z_0) = \sum_{k \in A; k \geq j} \frac{z_0^{k-j}}{(k-j)!}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

причем все эти ряды (или конечные суммы) сходятся абсолютно.

Предположим, что все $M_n(A)$ отображений из рассматриваемого класса имеют одинаковые вероятности, равные $(M_n(A))^{-1}$. На соответствующем вероятностном пространстве определим случайные величины $\mu_r^{(A)}$ и $\nu(A)$, равные, соответственно, числу вершин кратности $r \in A$ и кратности фиксированной вершины в случайном отображении.

Теорема 2. В условиях теоремы 1

$$\mathbf{E} \mu_r^{(A)} = n p_r^{(A)}(z_0) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad \mathbf{D} \mu_r^{(A)} = n \sigma_r^2(z_0) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

где $r = \text{const} \in A$;

$$p_r^{(A)}(z_0) = \frac{z_0^r}{r!} (P_A(z_0))^{-1}, \quad \sigma_r^2(z_0) = p_r^{(A)}(z_0) \left(1 - p_r^{(A)}(z_0) \left(1 + \frac{(r-1)^2}{f_A(z_0)} \right) \right) > 0$$

и равномерно относительно тех целых положительных значений $m = n p_r^{(A)}(z_0) + x\sqrt{n}$, для которых $|x| \leq C = \text{const}$,

$$\mathbf{P} \left\{ \mu_r^{(A)} = m \right\} = \frac{d_r}{\sqrt{2\pi n \sigma_r^2(z_0)}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_r^2(z_0)} \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right). \quad (6)$$

В формуле (6) $d_r = \text{н. о. д. } \{k \mid k \in A_r\}$ ($r \geq 1$); $d_0 = \text{н. о. д. } \{k - \min A_0 \mid k \in A_0\}$; $A_r = A \setminus \{r\}$ ($r \in A$).

Теорема 3. Пусть удовлетворяющее условиям (4) множество A счетно и $n = n(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ ($r \in A$) так, что $n \in \mathbf{N}$ и $n p_r^{(A)}(z_0) \rightarrow \lambda > 0$.

Тогда случайная величина $\mu_r^{(A)}$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Теорема 4. В условиях теоремы 2

$$\mathbf{P} \{ \nu(A) = r \} = p_r^{(A)}(z_0) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

З а м е ч а н и е 2. Если $\mathbf{P} \{ \xi = r \} = p_r^{(A)}(z_0)$ ($r \in A$), то $\mathbf{E} \xi = 1$, $\mathbf{D} \xi = f_A(z_0)$.

З а м е ч а н и е 3. Предельные распределения числа циклических точек и высоты случайного отображения с указанными выше ограничениями на кратности вершин рассматривались ранее в [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 208 с.
2. Arney J., Bender E. A. Random mappings with constraints on coalescence and number of origins. — Pacific J. Math., 1982, v. 103, № 2, p. 269–294.
3. Калугин И. Б. Число циклических точек и высота случайного отображения с ограничениями на кратности вершин. — В сб.: Вероятностные методы в дискретной математике. Тезисы докладов Всесоюзной конференции. Петрозаводск: 1983, с. 35–36.
4. Калугин И. Б. Ветвящиеся процессы и случайные отображения конечных множеств. — Матем. заметки, 1983, т. 34, № 5, с. 757–771.