

В. А. Толпаев, Д. В. Баско (Ставрополь, СевКавГТУ). **Основное уравнение упругого режима фильтрации в искривленных пластах переменной толщины.**

Рассматриваются фильтрационные течения упругой жидкости в упругих искривленных пластах переменной толщины, непроницаемые подошва и кровля которых могут быть заданы гладкими координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = \text{const}$ и $\zeta = \zeta_2 = \text{const}$ соответственно в некоторой криволинейной ортогональной системе координат ξ, η, ζ . Реальные фильтрационные течения в таких пластах почти всюду имеют поверхности тока, по форме близкие к координатным поверхностям. Поэтому для всех стационарных и нестационарных фильтрационных течений жидкости в искривленных слоях в качестве поверхностей тока принимаются координатные поверхности $\zeta = \text{const}$. В принятой аппроксимации кинематики фильтрационного течения составляющая v_ζ скорости фильтрации вдоль ζ -координатных линий равна 0, и поэтому скорость фильтрации будет представима в виде

$$\vec{v} = v_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \vec{e}_1 + v_\eta(\xi, \eta, \zeta, t) \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3, \quad (1)$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орты локального базиса в системе ξ, η, ζ , а v_ξ и v_η — проекции скорости фильтрации на ξ и η -координатные линии.

Для вывода основного дифференциального уравнения фильтрации упругой жидкости в упругом искривленном пласте воспользуемся уравнением неразрывности, динамическим уравнением движения и уравнениями состояния пористой среды и насыщающей ее жидкости.

Уравнение неразрывности фильтрационного потока для принятого допущения (1) о течении сжимаемой жидкости в искривленных пластах переменной толщины имеет вид [1]

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial(\rho v_\xi H_2 H_3)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v_\eta H_1 H_3)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \right\} d\zeta = 0, \quad (2)$$

где H_1, H_2 и H_3 — параметры Ламе выбранной расчетной ортогональной криволинейной системы координат ξ, η, ζ , а ρ и m — плотность флюида и пористость пласта соответственно.

Уравнение состояния жидкости для упругого режима фильтрации задается в виде [2], [3]

$$\rho(p) = \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}}(p - p_0)], \quad (3)$$

где $\beta_{\text{ж}}$ — коэффициент объемного сжатия жидкости, а ρ_0 — плотность жидкости при некотором фиксированном начальном значении давления p_0 .

Поведение изотропной непрерывно неоднородной как по пористости, так и по проницаемости пористой среды должно описываться двумя уравнениями состояния: $K = K(\xi, \eta, \zeta, p)$ и $m = m(\xi, \eta, \zeta, p)$, описывающими зависимости проницаемости K и пористости m от координат ξ, η, ζ и давления p . Первое уравнение состояния авторы, следуя общепринятому в линейной теории упругого режима фильтрации допущению о возможности пренебрежения зависимостью проницаемости от давления [2], [3], принимают в виде $K = k_0 k(\xi, \eta, \zeta)$, где k_0 — постоянный коэффициент с размерностью проницаемости, а $k(\xi, \eta, \zeta)$ — безразмерная функция. Второе уравнение состояния авторы принимают в виде

$$m(\xi, \eta, \zeta, p) = m_0(\xi, \eta, \zeta) + \beta_c(\xi, \eta, \zeta)(p - p_0). \quad (4)$$

Это уравнение представляет собой естественное обобщение известного уравнения состояния однородной изотропной пористой среды. В (4) величина $m_0(\xi, \eta, \zeta)$ есть пористость пласта при некотором зафиксированном начальном значении давления p_0 , $\beta_c(\xi, \eta, \zeta)$ — коэффициент объемной упругости твердого скелета пласта. В качестве

фиксированного начального значения давления p_0 в работе выбирается среднее арифметическое $p_0 = (p_{\max} + p_{\min})/2$ между максимальным $p_{\max}$ (обычно это пластовое давление p_{Π}) и минимальным $p_{\min}$ (обычно это давление в скважине p_c) давлениями в пласте. При указанном выборе давления p_0 величины ρ_0 и m_0 в формулах (3) и (4) будут равны средним значениям

$$\rho_0 = \frac{1}{p_{\max} - p_{\min}} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \rho(p) dp \quad \text{и} \quad m_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{p_{\max} - p_{\min}} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} m(\xi, \eta, \zeta, p) dp. \quad (5)$$

В. Н. Щелкачев в своей монографии [3, с. 36] отмечает, что «величина объемного коэффициента сжатия для нефти и воды не более чем 10^{-3}МПа^{-1} . Изменения же давления $(p - p_0)$ в условиях разработки нефтяных и артезианских пластов обычно меньше или в редких случаях несколько больше (но того же порядка) чем 10МПа ». Поэтому, пользуясь уравнением (3) и приведенными данными, легко подсчитать, что колебание между максимальным $\rho_{\max}$ и минимальным $\rho_{\min}$ значением плотности фильтрующейся жидкости относительно среднего значения ρ_0 составит величину порядка 1%. Поэтому в динамическом уравнении фильтрации сжимаемой жидкости [2], [3]

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} (\text{grad } p + \rho g \vec{e}_z) \quad (6)$$

(где μ — постоянный коэффициент динамической вязкости жидкости, g — ускорение свободного падения, $\vec{e}_z$ — единичный вектор направленной вертикально вверх оси z декартовой системы координат x, y, z) мало изменяющуюся переменную плотность заменим на постоянное среднее значение ρ_0 . Тогда, уравнение (6) примет вид

$$\vec{v} = -\frac{k_0 k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu} \text{grad } P, \quad (7)$$

где $P = p + \rho_0 g z$ есть приведенное давление, при подсчете которого z отсчитывается от некоторой зафиксированной (нивелировочной) горизонтальной плоскости xOy . На основании уравнения (7) для проекций скорости фильтрации упругой жидкости на направления ξ - и η -координатных линий в искривленном пласте получаем выражения

$$v_\xi = -\frac{k_0 k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu} \frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad v_\eta = -\frac{k_0 k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu} \frac{1}{H_2} \frac{\partial P}{\partial \eta}. \quad (8)$$

Подчеркнем, что в формулах (8) приведенное давление не зависит от ζ и является функцией вида $P = P(\xi, \eta, t)$, так как $v_\zeta = 0$. Подставляя далее (8) в (2) и пользуясь при вычислении интеграла от дивергентной части средним значением плотности жидкости ρ_0 , получаем уравнение

$$\frac{k_0 \rho_0}{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[T_1(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T_2(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \right] d\zeta, \quad (9)$$

где

$$T_1(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} k(\xi, \eta, \zeta) \frac{H_2 H_3}{H_1} d\zeta \quad \text{и} \quad T_2(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} k(\xi, \eta, \zeta) \frac{H_1 H_3}{H_2} d\zeta.$$

При преобразовании правой части формулы (9) воспользуемся общепринятыми в теории упругого режима фильтрации допущениями, позволяющими записать приближенное равенство

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \rho_0 \beta^* \frac{\partial p}{\partial t},$$

где $\beta^* = \beta_c + m_0\beta_{\text{ж}}$. Из определения $P = P(\xi, \eta, t) = p + \rho_0 g z$ приведенного давления и независимости друг от друга переменных z и t вытекает, что $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}$, и поэтому для правой части уравнения (9) получается выражение

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \right] d\zeta = \rho_0 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\beta^* \frac{\partial P}{\partial t} H_1 H_2 H_3 \right] d\zeta = \rho_0 T_3(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (10)$$

где

$$T_3(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (\beta^* H_1 H_2 H_3) d\zeta.$$

После подстановки в правую часть формулы (9) значения интеграла из формулы (10) окончательно для описания линейной фильтрации упругой жидкости в упругом искривленном пласте получим следующее уравнение

$$\frac{k_0}{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[T_1(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T_2(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \right\} = T_3(\xi, \eta) \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (11)$$

Естественно, для решения конкретных задач упругого режима фильтрации в искривленных неоднородных пластах переменной толщины для уравнения (14) еще необходимо будет задать начальные и граничные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толпаев В. А., Палиев В. В. Уравнение неразрывности в двумерных моделях фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины. — Изв. Саратовского ун-та, сер. матем. мех. информ., 2007, в. 2, с. 49–53.
2. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. Учебное пособие для вузов. М.: Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005, 544 с.
3. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. Ч. 1. М.: Нефть и газ, 1995, 586 с.