

В. Л. К р е п с, В. К. Д о м а н с к и й (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги с тремя ставками, и возвратные последовательности.

В работах [1, 2] рассматривалась следующая упрощенная модель биржевых торгов с асимметричной информированностью агентов. Два биржевых игрока имеют деньги и однотипные рискованные ценные бумаги (акции). Цена акции определяется случайным ходом перед началом торгов и может принимать два значения: высокое, равное целому положительному числу m , с вероятностью p , и низкое, равное нулю, с вероятностью $1 - p$. Исход случайного хода сообщается Игроку 1 (инсайдеру) и не сообщается Игроку 2. Игрок 2 знает об информированности Игрока 1. Вероятности исходов случайного хода известны обоим игрокам.

Затем, игроки ведут между собой многошаговые торги. На каждом шаге торгов $t = 1, 2, \dots, n$, игроки одновременно делают ставки — называют свою цену акции. Допустимы только целочисленные ставки из промежутка $[0, m]$. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Оба игрока стремятся максимизировать цену своего итогового портфеля (деньги плюс цена приобретенных акций).

Эта модель сводится к антагонистической повторяющейся игре $G_n^m(p)$ с неполной информацией у второго игрока (см. [3]). В [1] получены решения игр $G_\infty^m(p)$ с произвольным, заранее не ограниченным числом шагов. Однако, вопрос построения решений для конечношаговых игр $G_n^m(p)$ остается открытым. Случай двух допустимых ставок ($m = 2$) тривиален — обнаружение истинного состояния Игроком 2 происходит на первом шаге. В случае трех допустимых ставок ($m = 3$) ситуация сильно усложняется и даже одношаговая игра становится нетривиальной.

В настоящей работе получены в явном виде решения игр $G_n^3(p)$ с тремя допустимыми ставками. Кусочно линейные функции значений $V_n^3(p)$ этих игр и оптимальные стратегии игроков выражаются с помощью возвратной последовательности второго порядка (см. [4])

$$\delta_{n+1} = 2(\delta_n + \delta_{n-1}), \delta_1 = 2, \delta_2 = 4.$$

Члены последовательности δ_n допускают аналитическое выражение

$$\delta_n = \frac{(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}.$$

Теорема. Кусочно линейная функция значений $V_n^3(p)$ игры $G_n^3(p)$ при любом n имеет три точки излома $p_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, причем первая и третья точки не зависят от n : $p_1(n) = 1/3$, $p_3(n) = 2/3$. Вторая точка излома при $n > 1$ определяется равенством

$$p_2(n) = (\delta_{n-1} + \delta_n) / (\delta_{n-1} + 2\delta_n).$$

Функция $V_n^3(p)$ определяется своими значениями на концах отрезка $[0, 1]$, где $V_n^3(0) = V_n^3(1) = 0$, и значениями в точках излома:

$$V_n^3(p) = \begin{cases} 1 - 2/3\delta_n & \text{при } p = 1/3; \\ 1 - 1/(2\delta_n + \delta_{n-1}), & \text{при } p = p_2(n); \\ 1 - 1/3\delta_{n-1} & \text{при } p = 2/3. \end{cases}$$

Исследование проводилось при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-06-00174-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доманский В.К., Крепс В.Л. Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 399–416.
2. Domansky V. Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets. — Internat. J. Game Theory, 2007, v. 36, № 2, p. 241–257.
3. Aumann R. J., Maschler M. Repeated Games with Incomplete Information. Cambridge, MA–London: MIT Press, 1995.
4. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М.: Наука, 1975.