Е. Г. Гольштейн (Москва, ЦЭМИ РАН). **Седловой метод, использующий неточные исходные данные.**

В [1] был предложен итеративный метод отыскания седловой точки удовлетворяющей условию Липшица выпукло-вогнутой функции, эффективное множество которой содержится в многограннике. Предполагалось, что исследуемая функция задается посредством некоторого вспомогательного алгоритма — *оракула*. В ответ на каждое обращение к оракулу последний вычисляет определенную локальную характеристику функции, которая используется в процессе поиска седловой точки. Анализ сходимости метода, содержащийся в [1], опирался на допущение о том, что все отклики оракула не содержат ошибок. Вместе с тем, во многих случаях оракул, являясь численным алгоритмом, работает с ошибками, величина которых зависит от времени использования соответствующего алгоритма.

В докладе, представленном данным сообщением, приводится модификация метода из [1], допускающая использование неточных откликов оракула, и дан анализ ее сходимости.

Выпукло-вогнутая удовлетворяющая условию Липшица функция f и ее эффективное множество $G = G_1 \times G_2$ задаются при помощи оракула. Действие оракула состоит в следующем. Для произвольной точки $z \in M$, где $M = M_1 \times M_2$ есть выпуклый многогранник, содержащий G, он, прежде всего, выясняет, принадлежит ли данная точка внутренности множества G. Если $z \in \operatorname{int} G$, то оракул вычисляет приближенное значение $\widetilde{l}_x$ некоторого субградиента $l_x \in \partial_x f(z)$ и приближенное значение $\widetilde{l}_y$ некоторого суперградиента $l_y \in \partial_y f(z)$. Если же $z \notin \operatorname{int} G$, то оракул находит с некоторой ошибкой гиперплоскость, проходящую через точку z и содержащую множество G в своем нижнем полупространстве. При этом ошибка оракула не превышает $\delta \geqslant 0$.

Близость произвольной точки $z = (x, y) \in G$ к седловому множеству Z^* функции $f(z)$ на множестве G будем оценивать, как и в [1], неотрицательной величиной

$$\Delta(z) = \max_{z'=(x',y')\in G} [f(x, y') - f(x', y)],$$

которая обнуляется лишь в точках Z^*. Мера близости является ообобщением оценки по функционалу, используемой в задачах оптимизации.

Пусть $\varepsilon \geqslant 0$. Точку $z \in G$, для которой $\Delta(z) \leqslant \varepsilon$, условимся называть *$\varepsilon$-седловой точкой* функции f на G.

Основной результат доклада состоит в следующем.

Теорема. *Пусть $f(z) = f(x, y)$ — выпукло-вогнутая функция, определенная конечными значениями на выпуклом компакте $G = G_x \times G_y$ и удовлетворяющая условию Липшица на G с постоянной L, причем $G \subset M$, где M — многогранник диаметра d, G содержит шар радиуса $r > 0$. Седловой метод, описанный в докладе, позволяет для любого $\varepsilon > 0$ при соблюдении приведенных ниже требований к точности δ работы оракула вычислить ε-седловую точку функции f на G за $k(\varepsilon)$ итераций. При этом верхняя оценка для $k(\varepsilon)$ может быть вычислена одним из следующих двух способов*:

1) *если $\varepsilon < LD$, а δ настолько мало, что $(L+1)d^2r^{-1}\delta < \varepsilon$, то $k(\varepsilon) \leqslant]d^2\lambda^{-2}(1-\lambda^2)^{-1}\varepsilon_1^{-2}[$, где $\varepsilon_1 = r(L+1)^{-1}d^{-1}\varepsilon - d\delta$, $\lambda \in (0, 1)$ — параметр метода, под $]a[$ при любом вещественном a понимается наименьшее целое число, большее либо равное a*;

2) *если $\varepsilon \geqslant Ld$, причем $\delta < r/d$, то $k(\varepsilon) \leqslant [d^2\lambda^{-2}(1-\lambda^2)^{-1}(r-d\delta)^{-2}]$, где $[a]$ при любом вещественном a является наибольшим целым числом, не превышающим a.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бэр К.*, *Гольштейн Е.Г.*, *Соколов Н.А.* Метод отыскания седловой точки функции, область определения которой содержится в многограннике. — Эконом. матем. методы, 2001, т. 37, № 3, с. 97–105.