

А. Р. Симонян, Е. И. Улитина, М. А. Сунцова (Сочи, СГУТиКД). **Об одной теореме для виртуальных времен ожидания в модели Клейнрока.**

Модель $M_r|G_r|1|\infty$. В одноканальную систему с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r -вызовов с параметрами $a_1, \dots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для k -вызовов имеют функцию распределения $B_k(x)$, $B_k(+0) = 0$. В момент $t = 0$ система свободна от вызовов.

Дисциплина Клейнрока. Поступивший в момент $\tau > 0$ в модель k -вызовов, $k = 1, \dots, r$, в момент t получает приоритет $b_k(t - \tau)^z$, где $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r > 0$. Прерывания обслуживания не допускаются. При завершении очередного обслуживания из очереди на прибор выбирается вызов с наибольшим приоритетом.

Моделью Клейнрока называем модель $M_r|G_r|1|\infty$ с дисциплиной Клейнрока.

Главная характеристика — виртуальное время ожидания (ВВО) k -вызова $w_k(t)$ в момент t . ВВО $w_k(t)$, $k = 1, \dots, r$, $t \geq 0$, есть время, которое пришлось бы ждать k -вызову до начала обслуживания, если бы он поступил в модель в момент t .

Задача нахождения ФР ВВО $w_k(t)$, $k = 1, \dots, r$, $t \geq 0$, уже 35 лет является нерешенной проблемой [1]–[5]. В работе [5] для $w_k(t)$, $k = 1, \dots, r$, $t \geq 0$, получена система уравнений, однако в них обнаружена ошибка.

В настоящей работе методом работы [5] ошибка устранена, а также предложен новый метод анализа величин $w_k(t)$, $k = 1, \dots, r$, $t \geq 0$.

Информация. Обозначим

$$a_{ik} = a_i \left[1 - \frac{b_{k+1}}{b_i} \right], \quad \sigma_k = \sum_{i=2}^k a_{ik}, \quad i = 1, \dots, k, \quad k = 1, \dots, r, \quad b_{r+1} = 0,$$

$$\beta_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB_k(x), \quad \omega_k(s, t) = \mathbf{E} e^{-s\omega_k(t)}, \quad m_k(s) = s + \sigma_k - \sigma_k \pi_k(s),$$

$s \geq 0$, $t \geq 0$, $\mathbf{E}$ — знак математического ожидания, а функция $\pi_k(s)$ — минимальный по абсолютному значению корень $x = x(s)$ функционального уравнения $\sigma_k x = \sum_{i=1}^k a_{ik} \beta_i(s + \sigma_k - \sigma_k x)$.

При $t \geq 0$, $s \geq 0$, $k = 1, \dots, r$ справедливы равенства [5]:

$$w_k(s, t) = \bar{w}_k(m_{k-1}(s), t), \quad (1)$$

где $\bar{w}_k(s, t) = \mathbf{E} \exp\{-s\bar{w}_k(t)\}$ и $\bar{w}_k(t)$ суть $w_k(t)$ без времен обслуживания вызовов, поступивших и обслуженных за $(t, t + w_k(t))$.

Результаты. При $k = 1, \dots, r$, $j = k, \dots, r$ и $s \geq 0$ положим $p_k(s) = s - \sum_{i=1}^k a_i(1 - \beta_i(s))$, $p_k^j(s) = s - \sum_{i=1}^k a_{ij}(1 - \beta_i(s))$. Ошибку работы [5] исправляет следующий результат.

Теорема. При любых $t \geq 0$, $s \geq 0$, $k = 1, \dots, r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \bar{w}_k(s, t) = e^{p_k(s)t} & \left\{ 1 - s \int_0^t e^{-p_k(s)u} P(u) du - \sum_{j=k+1}^r a_j(1 - \beta_j(s)) \int_0^t e^{-p_k(s)\nu} d\nu \right. \\ & \left. \times \int_0^{b_k(t-\nu)/(b_k-b_j)} e^{p_k^{j-1}(s)u} du \mathbf{P}\{w_i(v) < u\} \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}$ — знак вероятности и $\int_0^\infty e^{-st} P(t) dt = (m_r(s))^{-1}$, $s \geq 0$.

Уравнения (1)–(3) содержат полную информацию о ФР ВВО $w_k(t)$, $k = 1, \dots, r$, $t \geq 0$. В частности, из (2) при $k = r$ имеем

$$w(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{w}_r(s, t) e^{p_r(s)t} \left\{ 1 - s \int_0^t e^{-p_r(s)u} P(u) du \right\}, \quad t \geq 0, \quad s \geq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнрок Л. Коммуникационные сети. Стохастические потоки и задержки сообщений. М.: Наука, 1970, 255 с.
2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979, 600 с.
3. Даниелян Э. А. Об одной системе с динамическими приоритетами. — Ученые записки ЕГУ, 1980, № 3, с. 19–25.
4. Bagchi U., Sullivan R. S. Dynamic non-preemptive queues with general linearly increasing priority function. — Oper. Res., 1985, p. 1278–1298.
5. Danielian E. A., Lieze F. The analysis of a $M_r|G_r|1|\infty$ model with time dependent priorities. — Rostock. Math. Kolloq., 1991, v. 43, p. 39–54.