В. И. А ф а н а с ь е в (Москва, МИРАН). **О глобальных характеристиках критического ветвящегося процесса в случайной среде.**

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), задаваемый последовательностью независимых одинаково распределенных (случайных) производящих функций $\{f_n(s), n \in \mathbf{N}\}$. Предполагается, что производящая функция $f_n(s)$ определяет закон размножения в $(n-1)$-м поколении и $\xi_0 = 1$.

Назовем глобальными такие характеристики процесса, для вычисления которых требуется знание значений ξ_n при всех n. Глобальными характеристиками являются: *время жизни процесса* $T = \min\{n : \xi_n = 0\}$, *общее число частиц* $\Sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i$, *численность максимального поколения* $M = \max_{i \in \mathbf{N}_0} \xi_i$, *номер максимального поколения* $T_M = \min\{n : \xi_n = M\}$.

Нас интересуют предельные теоремы, связывающие эти глобальные характеристики, в случае, когда ВПСС является критическим. Это означает, что $\mathbf{E}\, X_1 = 0$. Положим $X_n = \ln f_n'(1)$, $\eta_n = f_n''((1)f_n'(1))^{-2}$, $n \in \mathbf{N}$. Будем предполагать, что выполнены следующие моментные ограничения:

$$0 < \mathbf{E}\, X_1^2 := \sigma^2 < +\infty, \qquad \mathbf{E} \ln^q(\eta_1 \vee 1) < +\infty$$

при некотором $q > 2$.

Приведем результаты о глобальных характеристиках. При $u > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\biggl\{\frac{\ln M}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant u \Bigm| T > n\biggr\} = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{u} + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k^2u^2}, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\biggl\{\frac{\sigma^2 T}{2\ln^2 x} \leqslant u \Bigm| M > x\biggr\} = \frac{2}{\sqrt{\pi u}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{u}}. \tag{2}$$

Далее, положим

$$a_{k,r}(u) = \frac{2k}{\sqrt{k^2u + r^2(1-u)}\,(k + \sqrt{k^2u + r^2(1-u)})},$$

$$b_{k,r}(u) = \frac{4k^2r^2}{k^2 - r^2}\biggl(\frac{1}{(k^2u + r^2(1-u))^{3/2}} - \frac{2^{3/2}}{(k^2 + r^2)^{3/2}}\biggr).$$

Тогда при $u \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\biggl\{\frac{T_M}{n} > u \Bigm| T > n\biggr\} = \ln 2 + \sum_{k,r\in\mathbf{N}} (-1)^{k+r} a_{k,r}(u), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\biggl\{\frac{T_M}{T} > u \Bigm| T > n\biggr\} = \frac{1}{2} + \sum_{k,r\in\mathbf{N}} (-1)^{k+r} b_{k,r}(u) \tag{4}$$

(в последней сумме при $k = r$ слагаемое полагается равным $3(1-2u)/k$).

Утверждения (1) и (2) сохраняют силу, если случайную величину M заменить на Σ. Это объясняется тем, что случайные величины $\ln M$ и $\ln \Sigma$ асимптотически неразличимы. Иначе обстоит дело, если мы рассмотрим отношение самих случайных величин Σ и M. Оказывается, что при $u > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\biggl\{\frac{\Sigma}{M} \leqslant u \Bigm| T > n\biggr\} = F(u), \tag{5}$$

причем предельная функция распределения $F(u)$ задается с помощью функций восстановления слабого нижнего и строгого верхнего процессов восстановления случайного блуждания $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbf{N}$.

В заключение отметим, что случайные величины T_M, T_M/T, Σ/M, рассмотренные в соотношениях (3)–(5), можно исследовать и при условии $\{M > x\}$. Но это задачи, ждущие своего решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00078).