

М. М. Макачук (Москва, ОПиПМ). **Определение оптимального шага по градиенту в задачах аппроксимации.**

Задачу аппроксимации некоторой зависимости $F(x)$ от (многомерного) аргумента x , определенного в некоторой области G , $x \in G$, будем понимать как нахождение приближенного представления

$$F(x) \approx \sum_{i=1}^m a_i f_i(x), \quad m < \infty, \quad (1)$$

через заданные функции $f_i(x)$ и искомые коэффициенты a_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

К таким задачам приходят, например, при необходимости разделения суммарного потока F на « m » его составляющих. Точность аппроксимации (1) оценивают обычно с помощью квадрата невязки

$$L = \int_G [F(\xi) - \sum_i a_i f_i(\xi)]^2 d\xi, \quad (2)$$

по области G . При этом наилучшей считается аппроксимация (1), где достигается $\min L$ за счет рационального выбора коэффициентов a_i .

Нахождение такого набора a_i , $i = 1, 2, \dots, m$ проводится в общем случае с помощью последовательных приближений.

Для определения области $G_{\min}$ расположения $\min L$ функции $L(a_i)$ в « m » — мерном пространстве коэффициентов a_i , $i = 1, 2, \dots, m$, используем известный метод [1] «спуска по градиенту». При этом исходными данными для организации j -го приближения являются значения коэффициентов $a_i^{(j-1)}$, полученные на предыдущем $(j-1)$ приближении. Тогда коэффициенты $a_i^{(j)}$ на j -м приближении будут определены как

$$a_i^{(j)} = a_i^{(j-1)} - t_j \frac{dL}{da_i} \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^m [dL/da_k]^2}}, \quad (3)$$

где $t_j > 0$ — «шаг по градиенту» на j -м приближении, а $\frac{dL}{da_i}$ — частные производные функции L , вычисленные по значениям $a_i^{(j-1)}$, полученным на $(j-1)$ -м приближении.

Все значения $a_i^{(j)}$, согласно (3) будут зависеть от величины шага t_j . Поэтому от t_j будет зависеть и сама функция $L(t_j) \geq 0$.

Подставляя (3) в (2), нетрудно обнаружить, что $L(t_j) = At_j^2 + Bt_j + C \geq 0$, где «коэффициенты» A, B, C зависят только от известных значений $a_i^{(j)}$, полученных на предыдущем $(j-1)$ -м приближении, т. е. A, B, C — известны и могут быть использованы для определения оптимального шага $t_j = -\frac{B}{2A}$, доставляющего минимум функции L после j -го приближения.

Можно отметить, что при некоторых случаях определение оптимального шага t_j в каждом приближении может обуславливать метод наискорейшего спуска по градиенту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н. Вводные лекции по прикладной математике. 1984.