

Г. В. Мартынов (Москва, ИППИ РАН). Моменты предельных распределений статистик Крамера–Мизеса и связанных с ними квадратичных форм.

Получены формулы для первых шести моментов с. в. $\Omega^2(d) = \int_{[0,1]^d} \mathcal{G}^2(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)'$, где $\mathcal{G}(\mathbf{t})$ — гауссовский процесс на $[0, 1]^d$ с корреляционной функцией $\mathcal{K}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$, $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in [0, 1]^d$. Разложение $\Omega^2(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Z_{k,s_k}^2$, где α_k — собственные значения корреляционного оператора, а Z_{k,s_k} независимые с. в. хи-квадрат, аппроксимируется конечной квадратичной формой

$$Q_{r,m}^* = \sum_{k=1}^r \alpha_k Z_{k,s_k}^2 + \sum_{i=1}^m \beta_i Y_{i,t_i}^2 \equiv Q_r' + Q_m'',$$

где хвост квадратичной формы заменяется на линейную комбинацию Q_m'' независимых гамма-распределенных случайных величин Y_{i,t_i} . Уравнивая $2k$ моментов $\Omega^2(d)$ и $Q_{r,m}^*$, можно определить подходящие значения β_i и t_i . Такая аппроксимация позволяет повысить точность вычисления распределений статистик типа $\Omega^2(d)$. Ранее рассматривался только случай $m = 1$ (ссылки см. в [1]). Путем преобразования формул с помощью MAPLE в каждом случае получены первые шесть моментов, из которых здесь приводятся четыре. Математическое ожидание Q_r' есть $E' = \sum_{k=1}^r \alpha_k s_k$, а центральные моменты даются формулами

$$M_2' = \mathbf{E}(Q_r' - \mathbf{E} Q_r')^2 = 2 \sum_{k=1}^r \alpha_k^2 s_k, \quad M_3' = \mathbf{E}(Q_r' - \mathbf{E} Q_r')^3 = 8 \sum_{k=1}^r \alpha_k^3 s_k,$$

$$M_4' = \mathbf{E}(Q_r' - \mathbf{E} Q_r')^4 = 12 \sum_{k=1}^r \alpha_k^4 (s_k^2 + 4s_k) + 24 \sum_{\substack{k_1=1, \dots, r \\ k_2=1, \dots, r \\ k_1 < k_2}} \alpha_{k_1}^2 \alpha_{k_2}^2 s_{k_1} s_{k_2}.$$

Аналогично могут быть записаны формулы для E'' , M_2'' , M_3'' , M_4'' , которые соответствуют Q_m'' . Могут быть легко получены также формулы для моментов $Q_{r,m}^*$ в терминах E' , M_i' и E'' , M_i'' . Математическое ожидание с. в. $\Omega^2(d)$ равно $E_0 = \int_{[0,1]^d} \mathcal{K}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) d\mathbf{t}$, а ее центральные моменты даются формулами:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_2 &= \mathbf{D}\Omega^2(d) = 2 \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \mathcal{K}^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) d\mathbf{t}_1 d\mathbf{t}_2, \\ \widetilde{M}_3 &= 8 \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) \mathcal{K}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) d\mathbf{t}_1 d\mathbf{t}_2 d\mathbf{t}_3, \\ \widetilde{M}_4 &= 4 \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \\ &\quad \times [\mathcal{K}^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \mathcal{K}^2(\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4) + \mathcal{K}^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) \mathcal{K}^2(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_4) + \mathcal{K}^2(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_4) \mathcal{K}^2(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \\ &\quad + 4\mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) \mathcal{K}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_4) \mathcal{K}(\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4) + 4\mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_4) \mathcal{K}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \mathcal{K}(\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4) \\ &\quad + 4\mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) \mathcal{K}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_4) \mathcal{K}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \mathcal{K}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_4)] d\mathbf{t}_1 d\mathbf{t}_2 d\mathbf{t}_3 d\mathbf{t}_4. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{t}_i = (t_{i1}, \dots, t_{id})'$. Выражения для $\widetilde{M}_5$ и $\widetilde{M}_6$ значительно более сложны. Получены простые выражения для моментов, когда $\mathcal{G}^2(\mathbf{t})$ является взвешенным многомерным броуновским или винеровским процессом. Одномерные аналоги таких процессов рассмотрены в [2]. Алгоритмы для вычисления моментов многомерного нормального распределения описаны в [3].

Найдено, что одномерная классическая статистика Крамера–Мизеса $\omega_n^2 = n \int_0^1 (F_n(t) - F(t))^2 dt$ имеет моменты $M_2 = 1/45$, $M_3 = 8/945$, $M_4 = 31/4725$, $M_5 = 16/2673$, $M_6 = 171889/25540515$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартынов Г. В.* Критерий омега-квадрат. М.: Наука, 1979, 80 с.
2. *Deheuvels P., Martynov G.* Karhunen–Loeve expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions. — *Progr. Probab.*, 2003, v. 55, p. 57–93.
3. *Triantafyllopoulos K.* On the central moments of the multidimensional Gaussian distribution. — *Math. Sci.*, 2003, v. 28, p. 125–128.