

Э. Л. Пресман, И. М. Сони́н (Москва, ЦЭМИ РАН; Шарлотт, Ун-т Сев. Каролины). **Оптимальная остановка случайных величин, заданных на конечной цепи Маркова.**

Мы считаем, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задана такая последовательность случайных величин $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ со значениями в $X = \{e\} \cup (B \otimes \mathbf{R})$, что $Z_n = (U_n, Y_n), n \geq 0$, и $\mathbf{P}\{Z_{n+1} = e | Z_0, \dots, Z_{n-1}, Z_n = e\} = 1$, $\mathbf{P}\{U_{n+1} = j, Y_{n+1} \in C | Z_0, \dots, Z_{n-1}, Z_n = z = (i, y)\} = p_{ij}F(j, C)$, $\mathbf{P}\{Z_{n+1} = e | Z_0, \dots, Z_{n-1}, Z_n = z = (i, y)\} = 1 - \sum_{j \in B} p_{ij}$ для $i, j \in B$, $y \in \mathbf{R}$, где $F(j, \cdot)$ — некоторые меры на борелевской прямой $\mathbf{R}$, $F(j, \mathbf{R}) = 1$, $j \in B$, а $P = (p_{ij}, i, j \in B)$ строго субстохастическая матрица, т. е. $\sum_{j \in B} p_{ij} < 1$ для всех $i \in B$. Очевидно, что последовательности $(Z_n)_{n \geq 0}$ и $(U_n)_{n \geq 0}$ образуют цепи Маркова. В этой ситуации обычно говорят о *последовательности случайных величин $(Y_n)_{n \geq 0}$, заданных на цепи Маркова $(U_n)_{n \geq 0}$* , или что цепь Z определяется строго субстохастической матрицей P и мерами $F(j, \cdot)$ $j \in B$.

Мы считаем, что на X задана такая измеримая функция $g(\cdot)$, что $g(e) = 0$, $\int_{\mathbf{R}} |g(i, v)| F(i, dv) < \infty$ для всех $i \in B$, и рассматриваем задачу оптимальной остановки цепи Z , определяемой строго субстохастической матрицей P и мерами $F(i, \cdot)$, с функцией платы $g(\cdot)$. Функцию выигрыша обозначим $V(z) = \sup_{\tau} \mathbf{E}[g(Z_{\tau}) | Z_0 = z]$.

Теорема. *Существует такой вектор $c^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$, что оптимальный момент остановки τ^* — это момент первого попадания в множество $\{e\} \cup R^*$, где $R^* = \{z = (i, y) : i \in B, y \in R_i^*\}$, $R_i^* = \{y : g(i, y) \geq c_i^*\}$. При этом $V(z) = g(z)$ если $z \in R^*$, $V(i, y) = c_i^* > g(i, y)$ если $z = (i, y) \notin R^*$, и c^* удовлетворяет соотношению $c_i^* = \sum_{j \in B} p_{ij}^* \int_{R_j^*} g(j, v) F(j, dv)$, где матрица $P^* = (p_{ij}^*, i, j \in B)$ определяется равенством $P^* = [I + P\mathcal{F}(R^*) - P]^{-1}P$, $\mathcal{F}(R^*) = (\delta_{ij}F(j, R_j^*), i, j \in B)$, и $F(j, R_j^*)p_{ij}^* = \mathbf{P}\{U_{\tau^*} = j | U_0 = i\}$ определяет распределение первой координаты в момент τ^* первого попадания цепи Z в множество $\{e\} \cup R^*$.*

Доказательство. использует алгоритм исключения состояний, суть которого в данном контексте состоит в последовательном применении приводимой ниже леммы и двух следствий из нее.

Рассмотрим сужение переходного оператора $\mathcal{P}$ нашей цепи на множество функций, заданных на $B \otimes \mathbf{R}$, которые можно рассматривать как вектор-функции $f(y) = (f(1, y), \dots, f(m, y))$, заданные на $\mathbf{R}$. На множестве таких функций определим оператор $\mathcal{L}$ формулой $\mathcal{L}f(i, y) = \int_{\mathbf{R}} f(i, v) F(i, dv)$, $(i, y) \in B \otimes \mathbf{R}$. Из определения оператора $\mathcal{P}$ для рассматриваемого случая вытекает, что оператор $\mathcal{P}$ переводит любую вектор-функцию в вектор-функцию, координаты которой равны константам и $\mathcal{P}f = P\mathcal{L}f$. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить, что марковская цепь Z определяется строго субстохастической матрицей P и оператором $\mathcal{L}$.

Для любого $C = \{(j, y) : j \in B, y \in C_j\}$, где C_j ($j \in B$) есть некоторые (возможно, пустые) множества из $\mathbf{R}$, наряду с операторами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$ будем рассматривать также операторы $\mathcal{P}_C$ и $\mathcal{L}_C$, определяемые равенствами $\mathcal{P}_C f = \mathcal{P}I_C f$, $\mathcal{L}_C f = \mathcal{L}I_C f$, где I_C — оператор умножения на характеристическую функцию множества C , и обозначим $\mathcal{F}(C)$ диагональную матрицу $(\delta_{ij}F(j, C_j), i, j \in B)$. Обозначим $\bar{C}$ дополнение множества C , т. е. $\bar{C} = (B \otimes \mathbf{R}) \setminus C$.

Пусть задано некоторое $R = \{(j, y) : j \in B, y \in R_j\}$. Пусть $\tau_0 = 0$ и пусть $\tau_n > 0$ ($n \geq 1$) — моменты последовательного попадания цепи Z в множество $\{e\} \cup R$ (если $Z_0 = z$ и $z \in \{e\} \cup R$, то τ_1 — это момент первого возвращения). Так как P строго субстохастична, то $P_z\{\tau_n < \infty\} = 1$ для любого $z \in X$.

Рассмотрим марковскую цепь $Z' = (Z'_n)_{n \geq 0}$, где $Z'_n = (U'_n, Y'_n)$, $U'_n = U_{\tau_n}$, $Y'_n = Y_{\tau_n}$, $n \geq 0$. Если $Z_0 = z$, то для любого $z \in X$ при $n \geq 1$ значения Z'_n принадлежат $\{e\} \cup R$. Обозначим $\mathcal{P}'$ переходной оператор цепи Z' , а I — тождественный оператор, т. е. $I = I_{B \otimes \mathbf{R}}$.

Лемма. Если $f(e) = 0$, то справедливы соотношения

$$\mathcal{P}'f = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_{\bar{R}}^l \mathcal{P}_R f = (I - \mathcal{P}_{\bar{R}})^{-1} \mathcal{P}_R f, \quad \mathcal{P}'f = \mathcal{P}f + (I - \mathcal{P}_{\bar{R}})^{-1} \mathcal{P}_{\bar{R}}(\mathcal{P}f - f).$$

Следствие 1. Марковская цепь Z' определяется строго субстохастической матрицей P' и оператором $\mathcal{L}'$, где $n \mathcal{L}'f(i, y) = (F(i, R_i))^{-1} \int_{R_i} f(i, v) F(i, dv)$, если $F(i, R_i) \neq 0$, $\mathcal{L}'f(i, y) = \mathcal{L}f(i, y)$, если $F(i, R_i) = 0$, $P' = [I - P\mathcal{F}(\bar{R})]^{-1} P\mathcal{F}(R)$.

Следствие 2. Если $\bar{R} \subseteq \{z : \mathcal{P}f(z) > f(z)\}$, то $\mathcal{P}'f(z) \geq \mathcal{P}f(z)$ для любого $z \in B \otimes \mathbf{R}$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 07-01-00541.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sonin I. M.* The elimination algorithm for the problem of optimal stopping. — Math. Meth. Operat. Res., 1999, p. 111–123.
2. *Sonin I. M.* The state reduction and related algorithms and their applications to the study of Markov chains, graph theory and the Optimal Stopping problem. — Adv. Math., 1999, v. 145, p. 159–188.