

С. Е. Холодовский (Чита, ЗабГПУ). **О решении дифференциальных уравнений с условиями сопряжения типа трещины на двух параллельных плоскостях.**

Рассмотрим в пространстве R^n , состоящем из трех зон $D_1(x < 0)$, $D_2(0 < x < l)$, $D_3(x > l)$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in R^{n-1}$ задачу

$$\partial_{xx} u_i + L[u_i] = 0, \quad x \in D_i, \quad (1)$$

$$x = l_i : \quad u_{i+1} = u_i, \quad \partial_x u_{i+1} - \partial_x u_i = A \partial_{xx} u_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным y_i , $l_1 = 0$, $l_2 = l$, $A > 0$ — постоянная, функция u_1 в D_1 имеет особые точки функции $f(x, y)$, которая удовлетворяет в R^n вне особых точек уравнению (1) и считается заданной (особые точки функции f расположены при $x < 0$). В частности, если L — оператор Лапласа, то задача (1), (2) описывает установившиеся динамические процессы в однородных средах при наличии двух взаимно параллельных трещин $x = 0$ и $x = l$, когда процесс индуцируется особыми точками (источниками, стоками и т. д.) заданной гармонической функции $f(x, y)$.

Методом свертывания разложений Фурье [1] получены формулы, выражающие решение задачи (1), (2) непосредственно через заданную функцию f . Для вывода указанных общих формул рассмотрим простейший оператор $L = \partial_{yy}$, $y \in R$. Пусть функция $f(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье: $f(0, y) = S[g] \equiv \int_0^\infty g d\lambda$, $g = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y$. Отсюда заданная функция $f(x, y)$ при $x > 0$, где она не имеет особых точек, представима в виде $f(x, y) = S[e^{-\lambda x} g]$, при этом имеет место формула

$$S \left[\frac{e^{-\lambda x} g}{(\lambda + \gamma)^{k+1}} \right] = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^k f(x + z, y) dz, \quad x > 0, \quad \gamma > 0. \quad (3)$$

Представляя решение задачи (1), (2) в виде $u_1 = f(x, y) + S[a_1 e^{-\lambda x} g]$, $u_2 = S[(a_2 \operatorname{sh} \lambda(x-l) + a_3 \operatorname{ch} \lambda(x-l))g]$, $u_3 = S[a_3 e^{-\lambda(x-l)} g]$, определяя из условий сопряжения (2) параметры a_i , разлагая в полученных параметрах множители $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию со знаменателем $q = e^{-2\lambda l} [1 - \gamma(\lambda + \gamma)^{-1}]^2$, где $\gamma = 2A^{-1}$, $|q| < 1$, окончательно решение задачи (1), (2) с учетом формулы (3) получим в виде

$$u_1 = f(x, y) - f(-x, y) + \Phi[f, -x] + \Phi \left[\left(\frac{z\gamma}{k+1} - 1 \right) f, -x + 2l \right], \quad (4)$$

$$u_2 = \Phi[f, x] + \Phi \left[\left(\frac{z\gamma}{k+1} - 1 \right) f, -x + 2l \right], \quad u_3 = \gamma \Phi \left[\frac{z}{k+1} f, x \right],$$

где

$$\Phi[f, x] = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{(-\gamma)^k}{k!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^k f(x + 2nl + z, y) dz,$$

C_{2n}^k — биномиальные коэффициенты. При этом формулы (4) справедливы для общего случая операторов L (1), что проверяется непосредственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холодовский С. Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения. — Журнал вычислит. матем. и матем. физ., 2007, т. 47. № 9, с. 1550–1556.