А. В. Ш м а к о в (Москва, МГУЛ)**. Частные автомодельные решения волнового уравнения в задачах гидродинамики.**

В [2] рассмотрена плоская нестационарная задача гидроупругости для цилиндрической оболочки с жидкостью. Систему уравнений идеальной сжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \tag{1}$$

где P — давление в жидкости, V, U — нормальная и тангенциальная скорость жидкости, r, t, φ — текущий радиус, время, полярный угол. В качестве масштабов выбраны величины: $[P] = \rho a^2$, $[V, U] = a$, $[t] = R/a$, $[r] = R$, где ρ — плотность жидкости, a — скорость звука в жидкости, R — радиус. Решение системы (1) ищем в виде разложения в ряд Фурье по угловой координате:

$$V(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos(n\varphi), \quad U(r,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin(n\varphi), \quad P(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(n\varphi).$$

После исключения из третьего уравнения системы (1) скоростей V и U, для n-й гармоники ряда получим

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = -\frac{\partial P_n}{\partial r}, \quad \frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{n}{r}P_n, \quad \frac{\partial^2 P_n}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P_n}{\partial r}\right) - n^2 P_n = 0. \tag{2}$$

Система уравнений (2) относительно автомодельной переменной $z = (1-t)/r$ перепишется в виде

$$\frac{dV_n}{dz} = z\frac{dP_n}{dz}, \quad \frac{dU_n}{dz} = nP_n, \quad (z^2-1)\frac{d^2P_n}{dz^2} + z\frac{dP_n}{dz} - n^2 P_n = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим сходящуюся акустическую волну, распространяющуюся от границы $r = 1$. Уравнение фронта сходящейся волны определяется соотношением $r + t - 1 = 0$. Значениям $z > 1$ соответствуют точки перед фронтом, возмущения в которых равны нулю. Значение $z = 1$ соответствует фронту волны, значение давления и скорости на котором считается равным нулю. Для $|z| \leqslant 1$ и $n > 1$ решение системы уравнений (3) имеет вид

$$\begin{aligned} &P_n(z) = B_n T_n(z), \quad V_n(z) = \frac{B_n}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(z) + \frac{n}{n-1}T_{n-1}(z)\right), \\ &U_n(z) = \frac{B_n}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(z) - \frac{n}{n-1}T_{n-1}(z)\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $T_n(z) = \sin(n \arccos(z))$ — полиномы Чебышева, B_n — коэффициенты интегрирования.

Следуя [1], решение системы (2) для n-й гармоники разложения запишем в виде

$$\begin{aligned} P_n(r,t) &= \int_0^{r+t-1} \omega_{pn}(\tau) T_n(\xi_1)\, d\tau, \\ V_n(r,t) &= \int_0^{r+t-1} \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(\xi_1) + \frac{n}{n-1}T_{n-1}(\xi_1)\right) d\tau, \\ U_n(r,t) &= \int_0^{r+t-1} \frac{\omega_{un}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(\xi_1) - \frac{n}{n-1}T_{n-1}(\xi_1)\right) d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\xi_1 = (1-t+\tau)/r$, $n > 1$.

Неизвестные переходные функции $\omega_{pn}(\tau)$, $\omega_{vn}(\tau)$, $\omega_{un}(\tau)$ связаны между собой зависимостями, которые получаются после подстановки (5) в (2) для n-й гармоники разложения: $\omega_{vn}(\tau) = \omega_{un}(\tau) = -\omega_{pn}(\tau)$.

Для определения переходных функций используется граничное условие. В частности, если при $r = 1$ задан закон изменения нормальной составляющей скорости жидкости $W(\varphi, t)$, то переходная функция $\omega_{vn}(\tau)$ определяется из интегральных уравнений для n-й гармоники:

$$\int_0^t \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(\xi) + \frac{n}{n-1}T_{n-1}(\xi)\right)d\tau = W_n(t), \tag{6}$$

где $\xi = 1 - t + \tau$, $W_n(t)$ — n-я гармоника $W(\varphi, t)$.

В случае, если правая часть в уравнениях (6) является заданной функцией времени, то интегральное уравнение (6) решается один раз для всего интервала $|\xi| \leqslant 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов В. И.* ДАН СССР, 1937, т. 14, № 1.
2. *Шмаков А. В.* Метод частных решений в плоской нестационарной задаче гидроупругости для цилиндрической оболочки с жидкостью. — В кн.: Процессы управления в механических системах. Междувед. сб. М.: МФТИ, 1990, с. 79–82.