

В. К. Горбунов, Ю. В. Мартыненко (Ульяновск, УлГУ).
Метод вариационных сплайнов для сингулярных дифференциальных уравнений.

Рассматривается начальная задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$F(\dot{x}, x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x^0,$$

где $x \in R^n$ и $F : R^{2n} \rightarrow R^n$, в случае переменного вырождения матрицы Якоби $\partial F(\dot{x}, x)/\partial \dot{x}$ на решении $x(t)$. Важный частный случай такой задачи — это система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad g(x(t), u(t)) = 0$$

с условиями $x(0) = x^0$, $u(0) = u^0$. Здесь трудности в численном решении возникают в случае вырождения Якобиана $\partial g(x(t), u(t))/\partial u$. Метод параметризации [1] позволяет решать такие системы с помощью перехода к соответствующей задаче минимизации интегральной невязки $\|F(\dot{x}, x)\|^2$ или $\|g(x, u)\|^2$ (нормы в пространстве L_2).

Существуют различные специализированные методы для неявных ОДУ и ДАУ, которые обладают конечным индексом (минимальное число дифференцирований, которое позволяет привести исходное уравнение к системе в нормальной форме) не более трех [3]. В таком случае матрица Якоби, упоминаемая выше, имеет постоянный ранг. Однако не все системы обладают конечным индексом, а само преобразование может быть достаточно сложным и плохо обусловленным, в частности, когда оно применяется к функциям, заданным с погрешностями.

Известно, что в случае переменного вырождения якобиана начальные задачи могут иметь неединственное решение. Также возможна неустойчивость по исходным данным. Следовательно, такие задачи относятся к классу некорректных задач и должны решаться в рамках соответствующих подходов [4].

В случае вырождения матрицы Якоби нами ставится задача о нахождении нормального решения, определяемого некоторой пробной функцией $z(t)$. Предлагаемый численный метод основан на минимизации Тихоновского стабилизирующего функционала $\|F(\dot{x}, x)\|^2 + \alpha \|x - z\|^2$ и аппроксимации ее решения $x_\alpha(t)$ «вариационным сплайном» с подвижными узлами. Сходимость сплайна к нормальному решению доказана. Первые и вторые производные функционала невязки по параметрам сплайна могут быть найдены с помощью сопряженных переменных [1]. Здесь мы представляем также более простой способ прямого дифференцирования невязки по параметрам [2]. Получены результаты аналитического и численного сравнения двух вариантов метода параметризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В. К., Луточкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации. — Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления, 2004, № 5, с. 67–84.
2. Горбунов В. К., Луточкин И. В., Мартыненко Ю. В. Метод параметризации для сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Труды Средневолжского математического общества. Саранск: СВМО, 2006, т. 8, в. 1, с. 36–50.
3. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999, 685 с.
4. Gorbunov V. K. Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization. J. of Inverse and Ill-Posed Problems (VSP Publisher), 2001, v. 9, № 6, p. 575–594.