Н. Н. Ш а д р и н а (Чита, ЗабГПУ). **О решении граничных задач в кусочно неоднородной полуплоскости с линией сопряжения, пересекающей границу.**

Рассмотрим в полуплоскости $D(y < 0)$, состоящей из двух неоднородных квадрантов $D_1(x < 0, y < 0)$ и $D_2(x > 0, y < 0)$ граничные задачи

$$div(p\nabla u_i) = 0, \quad (x, y) \in D_i; \quad G[u_1]\,|_{y=0} = 0, \quad G[u_2]\,|_{y=0} = f(x), \tag{1}$$

$$x = 0: \quad u_1 = u_2, \quad k_1\partial_x u_1 = k_2\partial_x u_2, \tag{2}$$

где G — оператор граничного условия I, II или III рода, $p(y) > 0$ — произвольная функция, допускающая решение уравнения (1), $k_i > 0$ — постоянные. Задачи (1), (2) описывают установившиеся процессы теплопроводности, фильтрации и т. д. в полуплоскости, состоящей из двух зон D_i с функциональной проницаемостью $k_i p(y)$.

Рассмотрим в полуплоскости D вспомогательные граничные задачи без условий сопряжения (2):

$$div(p\nabla\varphi) = 0, \quad G[\varphi]_{|y=0} = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Применяя метод статьи [1], выразим решения исходных задач (1), (2) через решение $F(x, y)$ классической задачи Дирихле (3) при $G[\varphi] = \varphi$.

Для вывода общих формул рассмотрим первую краевую задачу (3) при $p(y) \equiv 1$. Пусть решение $\varphi(x, y)$ указанной задачи при $x = 0$ разлагается в интеграл Фурье: $\varphi(0, y) = \int_0^\infty g d\lambda$, где $g = f_1 \sin\lambda y$. Тогда функция $\varphi(x, y)$ при $x < 0$ (где она удовлетворяет однородному граничному условию (3)) представима в виде разложения Фурье $\varphi(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda x} g d\lambda$. Представим решение соответствующей задачи (1), (2) в виде $u_1 = \int_0^\infty a_1 e^{\lambda x} g d\lambda$, $u_2 = \varphi(x, y) + \int_0^\infty a_2 e^{-\lambda x} g d\lambda$. Определяя из условий (2) параметры a_i, с учетом разложения функции φ окончательно найдем решение задачи (1), (2) в виде

$$u_1 = (1 + \nu)\varphi(x, y), \quad u_2 = \varphi(x, y) + \nu\varphi(-x, y), \tag{4}$$

где $\nu = (k_2 - k_1)(k_2 + k_1)^{-1}$.

Полученные формулы (4) справедливы для общего случая задач (1), (2), что проверяется непосредственно, при этом в этих формулах функция φ выражается через решение $F(x, y)$ задачи Дирихле (3) в виде $\varphi = F(x, y)$, $\varphi = \int_0^\infty [F(x, y - z) - F(0, -z)]\, dz$ или $\varphi = \int_0^\infty e^{-\gamma z} F(x, y - z)\, dz$ соответственно в случае граничного условия I, II или III рода (в последнем случае $G[u] = \partial_y u + \gamma u$) [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с усложненными условиями. — Математический анализ и его приложения. Чита: 2007, в. 7, с. 50–57.