

Л. Н. К и р и л л о в а (Ставрополь, СГУ). **Об оценке погрешностей при приближенном решении линейных уравнений в пространстве с конусом.**

Пусть E — вещественное банахово пространство, полуупорядоченное конусом K [1]. Рассмотрим уравнение

$$Ax = g \quad (g \in E) \quad (1)$$

с линейным оператором $A(E \rightarrow E)$. Пусть B — такой оператор, что

$$I - AB = C, \quad (2)$$

где C — линейный оператор, действующий в E . Предположим, что точное решение x^* уравнения (1) нам не известно, но известен некоторый элемент $x_0 \in E$, с которым

$$\pm(Ax_0 - g) \leq \varepsilon u_0 \quad (u_0 \in K). \quad (3)$$

В качестве x_0 может быть взято полученное тем или иным способом приближенное решение уравнения $Ax = g$. В частности, можно принять $x_0 = Bg$. Будем оценивать величину нормы разности $x^* - x_0$.

Теорема 1. Пусть оператор A имеет левый обратный, $\pm B \leq F$, $\pm C \leq D$, $Fu_0 \leq \gamma v_0$, $Du_0 \leq \alpha u_0$ ($\alpha < 1$), причем линейные операторы F и D положительны на K , а причем спектральные радиусы операторов C и D меньше единицы.

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение x^* при любой правой части $g \in E$. При этом $x^* - x_0 \in E_{v_0}$ и

$$\|x^* - x\|_{v_0} \leq \frac{\varepsilon \gamma}{1 - \alpha}. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е.

1. Если $v_0 = Fu_0$, то оценка (4) запишется в виде

$$\|x^* - x\|_{Eu_0} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}. \quad (4)$$

2. Часто в качестве x_0 приходится брать элемент Bg . В этом случае неравенства (3) запишутся в виде $\pm(AB - I)g \leq \varepsilon u_0$, т. е. в качестве ε можно взять величину $\|Cg\|_{u_0}$. Таким образом, $\|x^* - Bg\|_{v_0} \leq \gamma \|Cg\|_{u_0} / (1 - \alpha)$.

Теорема 2. Пусть уравнение (1) имеет решение x^* , и элемент x удовлетворяет неравенству (3). Пусть, далее, $I - AB = C_0$, $\pm B \leq F$, $\pm C_0 \leq D$, $Fu_0 \leq \gamma v_0$, $Dv_0 \leq \delta v_0$ ($\delta < 1$, $v_0 \in K$), причем линейные операторы F и D положительны на K , а спектральные радиусы операторов C_0 и D меньше единицы. Тогда $x^* - x_0 \in E_{v_0}$ и

$$\|x^* - x_0\|_{v_0} \leq \frac{\varepsilon \gamma}{1 - \delta} v_0.$$

З а м е ч а н и е. В процессе доказательства теоремы было установлено существование левого обратного A оператора. Это означает, что уравнение (1) не имеет других решение, кроме $x^* = \Omega_0 g$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
2. Голуб Дж., Лоун Ч. Ван. Матричные вычисления. Издательство «Мир», 1999.