

**О. В. Назарько** (Ростов-на-Дону, РГСУ). **О некоторых преобразованиях деформированных финансовых рынков.**

Пусть дан стохастический базис  $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathcal{F}, P)$  и  $(Q^{(n)})_{n=0}^N$  — деформация, т. е. семейство вероятностных мер, где

- 1)  $Q^{(n)}$  определена на  $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ ;
- 2)  $Q_n^{(n+1)} := Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)} \ll P_n := P|_{\mathcal{F}_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  (полагаем  $Q_N^{(N+1)} := Q^{(N)}$ ).

Стохастический базис, снабженный деформацией  $(Q^{(n)})_{n=0}^N$  называется *деформированным стохастическим базисом*. В силу свойства 2) определена случайная последовательность  $(h_n, \mathcal{F}_n)$ :  $dQ_n^{(n+1)} = h^{(n)} dQ^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $h^{(N)} := 1$ .

Если  $Q_n^{(n+1)} \sim Q^{(n)}$ , то такой стохастический базис называется *слабо деформированным стохастическим базисом* (WDSB=weakly deformed stochastic basis) и в силу эквивалентности мер  $(Q^{(n)})_{n=0}^N$  получаем:  $h^{(n)} > 0$   $Q^{(n)}$ -п.н.,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** *Деформированным мартингалом  $(M_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^N$  с весами  $(\zeta_n, \mathcal{F}_n)$  называется процесс, удовлетворяющий соотношениям:*

$$\mathbf{E}^{Q^{(n+1)}}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \zeta_n M_n.$$

Если положить  $\zeta_n \equiv 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , то получаем обычный деформированный мартингал.

В настоящем докладе устанавливаются связи мартингалов  $(Z_n, \mathcal{F}_n, P)_{n=0}^N$  с некоторыми деформированными мартингалами на WDSB в предположении, что  $P = Q^{(N)}$ . При таких предположениях выполняется цепочка эквивалентностей:  $Q_n^{(n+1)} \sim Q^{(n)} \sim P_n$ . Поэтому все дальнейшие равенства можно считать выполненными  $P$ -п.н. на соответствующих  $\sigma$ -алгебрах.

**О п р е д е л е н и е 2.** Деформация  $(R^{(n)})_{n=0}^N$  эквивалентна деформации  $(Q^{(n)})_{n=0}^N$ , если:

- 1)  $dR_n^{(n+1)} = h^{(n)} dR^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ;
- 2)  $R^{(n)} \sim Q^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

**Лемма.** *Если  $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathcal{F}, P = Q^{(N)}, (Q^{(n)})_{n=0}^N)$  — WDSB и мера  $P^* \sim P$ , то существует единственная слабая деформация  $(R^{(n)})_{n=0}^N$ , эквивалентная исходной деформации  $(Q^{(n)})_{n=0}^N$  и удовлетворяющая условию  $R^{(N)} = P^*$ .*

Пусть  $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$  — дисконтированная цена акции безарбитражного  $(B, S)$ -рынка на WDSB  $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathcal{F}, P, (Q^{(n)})_{n=0}^N)$ . По приведенной выше лемме можно считать, что  $P$  — мартингальная мера.

**Теорема 1.** *Справедлива формула:*

$$Z_n = \frac{1}{\eta_n^{(n+1)}} \mathbf{E}^{Q^{(n+1)}}[\eta^{(n+1)} Z_{n+1} | \mathcal{F}_n],$$

где  $\eta^{(n)} := dQ_n^{(N)} / dQ^{(n)}$ ,  $\eta_n^{(k)} := \mathbf{E}^{Q^{(k)}}[\eta^{(k)} | \mathcal{F}_n]$  ( $n, k = 0, 1, \dots, N$ ). Более того, плотности  $\eta^{(n)}$  могут быть определены по рекуррентной формуле:

$$\eta^{(n)} = \mathbf{E}^{Q^{(n+1)}}[\eta^{(n+1)} | \mathcal{F}_n] h^{(n)}.$$

**Теорема 2.** *Пусть  $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$  — мартингал. Тогда справедлива формула:*

$$Z_n = \left( \prod_{k=n+1}^{N-1} h_n^{(k)} \right)^{-1} \mathbf{E}^{Q^{(n+1)}}[h^{(n+1)} \xi^{(n+1)} Z_{n+1} | \mathcal{F}_n],$$

где  $h_n^{(k)} := \mathbf{E}^{Q^{(k)}}[h^{(k)}|\mathcal{F}_n]$  ( $n, k = 0, 1, \dots, N$ ), где с. в.  $\xi^{(n)}$  могут быть определены по следующей рекуррентной формуле:

$$\xi^{(n)} := \mathbf{E}^{Q^{(n+1)}}[h^{(n+1)}\xi^{(n+1)}|\mathcal{F}_n], \quad n = N-1, \dots, 0, \quad \xi^{(N)} := 1.$$

**Следствие.** Пусть  $\zeta_n = \prod_{k=n}^{N-1} h_{n-1}^{(k)} / (h^{(n)}\xi^{(n)})$ . Тогда:

- 1)  $\mathbf{E}^{Q^{(n+1)}}[\zeta_{n+1}^{-1}|\mathcal{F}_n] = 1$ ;
- 2) процесс  $(\zeta_n f_n, \mathcal{F}_n, P)_{n=0}^N$  — мартингал тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}^{Q^{(n+1)}}[f_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \zeta_n f_n, \quad \forall \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

- 3) если  $(\zeta_n, \mathcal{F}_n, P)_{n=0}^N$  — мартингал, то  $\zeta_n = 1 \quad \forall \quad n = 0, 1, \dots, N-1$ .

Таким образом, пункт 2 из следствия устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством деформированных мартингалов  $(f_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^N$  с весами и всеми мартингалами на  $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathcal{F}, P)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назарько О.В. О  $(B, S)$ -рынках на деформированных стохастических базисах. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 6, с. 1038–1039.
2. Назарько О. В.  $(B, S)$ -рынки на деформированных стохастических базисах. — Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. естеств. науки, 2008 (в печати).