В. И. С е д е н к о (Ростов-на-Дону, РГЭУ «РИНХ»). **Обобщенные решения начально-краевой задачи модели Маргерра–Власова колебаний пологих оболочек в случае ограниченных областей с границей произвольной гладкости.**

Предположим, что оболочка проектируется на плоскую ограниченную область Ω с границей $\Gamma \in C^1$. Поперечное перемещение w точек срединной поверхности оболочки удовлетворяет уравнению

$$hw_{tt}+D\Delta^2 w = Z+(N_1 w_{x_1})_{x_1}+(N_{12} w_{x_1})_{x_2}+(N_2 w_{x_2})_{x_2}+(N_{12} w_{x_2})_{x_1}-N_1 k_1-N_2 k_2 \quad (1)$$

с краевыми условиями жесткого защемления края оболочки

$$w|_\Gamma = \frac{dw}{dn}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где n — вектор внешней нормали к Γ,

$$\begin{aligned}
N_1 &= Eh(1-\mu^2)^{-1}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2), \quad \varepsilon_1 = u_{x_1}+k_1 w+\frac{1}{2}w_{x_1}^2,\\
N_2 &= Eh(1-\mu^2)^{-1}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1), \quad \varepsilon_2 = v_{x_2}+k_2 w+\frac{1}{2}w_{x_2}^2,\\
N_{12} &= \frac{1}{2}Eh(1+\mu)^{-1}\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{12} = u_{x_2}+v_{x_1}+w_{x_1}w_{x_2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Продольные перемещения u и v точек срединной поверхности оболочки удовлетворяют краевой задаче

$$\begin{aligned}
-\Delta u - \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_1} &= \frac{2}{1-\mu}\Big[(k_1 w)_{x_1}+w_{x_1x_1}w_{x_1}+\mu(k_2 w)_{x_1}\\
&\quad +\mu w_{x_1x_2}w_{x_2}\Big]+w_{x_1x_2}w_{x_2}+w_{x_1}w_{x_2x_2}+X,\\
-\Delta v - \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_2} &= \frac{2}{1-\mu}\Big[(k_2 w)_{x_2}+w_{x_2x_2}w_{x_2}+\mu(k_1 w)_{x_2}\\
&\quad +\mu w_{x_1x_2}w_{x_1}\Big]+w_{x_1x_2}w_{x_1}+w_{x_1x_1}w_{x_2}+Y,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0, \tag{5}$$

где X, Y — продольные составляющие внешних сил, действующих на оболочку $\theta = u_{x_1}+v_{x_2}$. Начальные условия имеют следующий вид:

$$w(x,0)=w_0(x), \quad w_1(x_0)=w_1(x), \quad u(x,0)=u_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x), \qquad x\in\Omega. \tag{6}$$

Относительно начально-краевой задачи (1)–(6) (см. [1]): $B_2^{2.1}(\Omega\times[0,t_f])$ — это пополнение множества бесконечно дифференцируемых на $Q=\Omega\times[0,t_f]$ функций, финитных на Ω при каждом фиксированном t, по норме, порожденной скалярным произведением

$$(w_1,w_2)_{B_2^{2.1}(Q)} = \int_0^{t_f}\Big[(w_{1t},w_{2t})_{L_2(\Omega)}+(w_1,w_2)_{H_2^2(\Omega)}\Big]\,dt,$$

t_f — обозначение здесь и далее конца временного интервала, на который не накладывается никаких ограничений за исключением строгой положительности. Обозначим $\dot B_2^{2.1}(Q)$ замыкание в $B_2^{2.1}(Q)$ множества таких бесконечно дифференцируемых на Ω функций, что $w(x_1,x_2)\equiv 0$, если $t_f-\delta \leqslant t \leqslant t_f$, где δ — некоторое положительное определенное для w число.

Обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(6) называется функция $w \in B_2^{2.1}(Q)$, удовлетворяющая следующему интегральному соотношению:

$$\int_0^{t_f} \int_\Omega \Big[-w_t w'_t + D\nabla^2 w \nabla^2 w' + (N_1 k_1 + N_2 k_2) w' + (N_1 w_{x_1} + N_{12} w_{x_2}) w'_{x_1} + (N_{12} w_{x_1} + N_2 w_{x_2}) w'_{x_2} - Z w' \Big]\, dx\, dt - \int_\Omega w_1 w'\, dx = 0 \tag{7}$$

для любой функции $w' \in \dot{B}_2^{2.1}(Q)$ и начальному условию

$$\lim_{t \to 0} \|w(\cdot, t) - w_0\|_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{8}$$

Величины N_1, N_2, N_{12} в (7) выражаются через w, u, v по формулам (3), (4), а u, v выражаются через w для каждого $t \in [0, t_f]$ как обобщенные решения краевой задачи (4), (5). Таким образом обобщенные решения начально-краевой задачи (1)–(6) определены в [1, с. 774–775].

Теорема 1. *Пусть граница* $\Gamma \in C^3$ *области* Ω *имеет ограниченные четвертые производные. Пусть* $w_0 \in \dot{H}_2^2(\Omega)$, $w_1 \in L_2(\Omega)$, $X(\cdot, 0), Y(\cdot, 0) \in L_p(\Omega)$, $x, Y \in L_{p.1}^{0.1}(Q)$, $p > 1$, $Z \in L_2(Q)$. *Тогда существуют обобщенные в смысле* (7), (8) *решения* w, u, v *начально-краевой задачи* (1)–(6), *удовлетворяющие следующим условиям*:

$$w \in L_\infty\Big([0, t_f], \dot{H}_2^2(\Omega)\Big) \bigcap L_{2,\infty}^{0.1}(Q) \bigcap C\Big([0, t_f], H_r^1(\Omega)\Big),$$

для всех $r \geqslant 1$ *и для любого* $q < 2$ $u, v \in L_\infty([0, t_f], H_p^2(\Omega))$ *при* $1 < p < 2$, $u, v \in L_\infty([0, t_f], H_q^2(\Omega))$ *при* $p \geqslant 2$.

Доказательство частично изложено в [1].

Теорема 2. *Пусть* $w_0 \in \dot{H}_2^2(\Omega)$, $w_1 \in L_2(\Omega)$, $X(\cdot, 0), Y(\cdot, 0) \in L_p(\Omega)$, $X, Y \in L_{p.1}^{0.1}(Q)$, $p > 1$, $Z \in L_2(Q)$. *Тогда существуют единственные обобщенные в смысле* (7), (8) *решения* w, u, v *начально-краевой задачи* (1)–(6), *удовлетворяющие следующим условиям*:

$$w \in L_\infty\Big([0, t_f], \dot{H}_2^2(\omega)\Big) \bigcap L_{2,\infty}^{0.1}(Q) \bigcap C\Big([0, t_f], \dot{H}_r^1(\Omega)\Big), \quad u, v \in L_\infty\Big([0, t_f], \dot{H}_2^1(\Omega)\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. — Изв. АН СССР, Сер. мат., 1957, т. 21, с. 747–784.