И. Х. У т а к а е в а (Черкесск, КЧГТА). **Алгоритм распознавания предфрактального графа с затравкой регулярной степени.**

Распознавание образов [1] — едва ли не самая распространенная задача, которую человеку приходится решать практически каждую секунду. Для этого используются огромные ресурсы мозга, включая одновременно около 10 млрд. нейронов. Именно это дает возможность людям мгновенно узнавать друг друга, читать тексты, безошибочно водить автомобиль и т. д. На промышленных предприятиях методы распознавания нашли применение при технической диагностике оборудования, разработке интеллектуальных роботов, в автоматизированных системах управления предприятиями. Методы и алгоритмы распознавания все в большей степени становятся неотъемлемым элементом медицинской диагностики, метеорологического прогноза и геологической разведки, локационных систем наблюдения, систем ввода информации в ЭВМ. Математической моделью многих задач распознавания является задача распознавания предфрактального графа. В силу вышесказанного вызывает интерес постановка задач распознавания предфрактальных графов, заключающихся в разработке эффективных алгоритмов распознавания.

В работе, представленной данным сообщением, под распознаванием предфрактального графа [3] понимаем ответ на вопрос: «Является ли исследуемый объект предфрактальным графом с заданной затравкой?», т. е. определить траекторию предфрактального графа. Рассматривается задача распознавания предфрактального графа [3] $G(V, E)$ с непересекающимися старыми ребрами, когда в качестве затравки [3] $H = (W, Q)$ выступает регулярный n -вершинный граф степени $s = n - 2$ и предлагается алгоритм α .

Алгоритм α . Для решения поставленной задачи распознавания предфрактального графа $G = (V, E)$ предлагается следующий алгоритм α , состоящий из этапов $\rho = 1, 2, \dots, L - 1$, которые взаимнооднозначно соответствуют текущим графам G_l , $l = 2, \dots, L$ траектории [3]. На входе этапа ρ рассматривается граф G_l , где $l = L - \rho + 1$. Этап ρ выделяет в G_l затравки, состоящие из ребер ранга l , после чего каждая из этих затравок стягивается в вершину. Полученный в результате текущий граф G_{l-1} представляется на вход этапа $l - 1$.

В процессе результативной реализации $L - 1$ этапов алгоритма получаем последовательность $G_L^*, G_{L-1}^*, \dots, G_1^*$. При этом считаем, что данный граф G , обозначаемый G_L^* , является предфрактальным каноническим графом, если последовательность имеет длину L , причем каждый представитель этой последовательности удовлетворяет необходимым условиям предфрактальности. Выполнение этих условий проверяется в результате реализации всех операций соответствующего этапа.

Опишем вычислительную схему первого этапа в случае, когда на его вход представлен исходный граф $G = (V, E)$.

Этап $\rho = 1$ начинает свою работу с проверки выполнения равенства $|V| = n^L$. Если это равенство не выполняется, то алгоритм заканчивает работу безрезультатно. В случае выполнения равенства, в графе G выделяется множество V_1 , состоящее из вершин степени $s = n - 1$, и V_2 , состоящее из вершин степени $s = n - 2$. Если $V \setminus (V_1 \cup V_2) \neq \emptyset$, то алгоритм заканчивает работу безрезультатно. В противном случае, V_1 и V_2 образуют разбиение множества V и, дальнейшая работа этапа $\rho = 1$ состоит из m_0 шагов, где m_0 — число таких затравок, каждая из которых состоит из новых ребер. Результатом каждого такого шага является выделенная в графе G очередная затравка. Процедуру выделения этой затравки обозначим β .

Описание процедуры β . Выделяем во множестве V_2 очередную неотмеченную вершину ν_1^* , т. е. вершину, которая не принадлежит какой-либо уже выделенной затравке. Так как вершина $\nu^* \in V_2$, то она имеет степень $n - 2$, т. е. смежна с $n - 2$ новыми вершинами своей затравки $H = (W, Q)$, которые обозначаем ν_k^* , $k = 2, \dots, n - 1$, и окрашиваем. В результате имеем $n - 1$ выделенных вершин n -вершинной затравки, т. е. непомятой осталась всего одна вершина. Рассмотрим теперь вершины,

смежные с выделенными v_k^* , $k = 2, \dots, n - 1$, но неокрашенные, и выделим среди них ту, которая будет смежной с $n - 2$ из уже окрашенных $n - 1$ вершин, согласно лемме 2 ниже, эта вершина также будет принадлежать этой затравке. Через W' обозначаем множество всех вершин, отмеченных процедурой β . Если $|W'| = n$, то выделяем и окрашиваем все ребра, у каждого из которых концы представляют собой вершины данного множества W' . Работа процедуры β завершается проверкой: образует ли множество выделенных таким образом вершин и ребер n -вершинный связный однородный граф степени $s = n - 2$. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру β , завершается результативно, и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае шаг считается безрезультатным, и алгоритм прекращает работу.

Этап $\rho = 1$ завершается, когда в данном графе $G = (V, E)$ все вершины окажутся отмеченными.

По окончании первой части алгоритма α осуществляем проверку, все ли вершины исходного графа G оказались отмеченными. Если да, то первый этап алгоритма заканчивает работу следующей процедурой. Исходный граф G обозначается G_L^* и представляется в качестве первого члена последовательности $G_L^*, G_{L-1}^*, \dots, G_1^*$. Каждая выделенная затравка графа G стягивается в вершину. Полученный в результате такого стягивания граф обозначается G_{L-1}^* . Далее по отношению к нему реализуем очередной этап алгоритма и т. д.

Для обоснования алгоритма сформулируем леммы:

Лемма 1. *Множество вершин всякого предфрактального графа с регулярной n -вершинной затравкой степени $s = n - 2$ и непересекающимися старыми ребрами, можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 , где V_1 составляют вершины, степени $n - 1$, а V_2 — степени $n - 2$, причем*

$$|V_1| = \frac{n(n-2)(n^{L-1}-1)}{n-1}, \quad |V_2| = \frac{n^L-1}{n-1},$$

где L — ранг.

Лемма 2. *Пусть в предфрактальном графе $G = (V, E)$ две вершины v_1 и v_2 принадлежат одной затравке $H = (W, Q)$ ($v_1, v_2 \in W$) и имеют смежность с некоторой вершиной $v \in V$.*

Тогда вершина v также принадлежит этой затравке H .

Теорема. *Всякий предфрактальный граф $G(V, E)$ с непересекающимися старыми ребрами, образованный регулярной n -вершинной затравкой $H = (W, Q)$ степени $s = n - 2$, является распознаваемым алгоритмом α , причем вычислительная трудоемкость $\tau(\alpha)$ алгоритма равна $O(|E|L)$.*

Доказательство. Каждая новая затравка ранга L либо сохраняет инцидентность только с $n - 2$ старыми ребрами ранга $L - 1$, либо с $n - 2$ ребрами предыдущего ранга $L - 1$ и одному ребру ранга $L - 1, L - 2, \dots, 1$. В первом случае новая затравка имеет две вершины минимальной степени $s = n - 2$, в силу непересечения старых ребер. Во втором случае новая затравка имеет одну вершину степени $s = n - 2$. Таким образом мы доказали, что всякая новая затравка имеет хотя бы одну вершину минимальной степени $n - 2$, а это обеспечивает распознавание каждой затравки.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислительной сложности алгоритма. Заметим, что в процессе реализации алгоритма осуществляются следующие операции: определение степени вершины; выявление окрестности радиуса 1 для этой вершины, просмотр всех пар вершин графа на предмет их сложности. Так как эти операции выполняются в пределах одной затравки, то верхняя оценка вычислительной сложности первой части алгоритма не превосходит совокупного количества ребер, выделенных и отмеченных в процессе работы. Таким образом, верхняя оценка трудоемкости $\tau(\alpha)$ алгоритма равна $O(|E|L)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горелик А. Л., Скрипкин В. А.* Методы распознавания. М.: Высшая школа, 2004.
2. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Саванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
3. *Кочкаров А. М.* Распознавание предфрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз РАН САО, 1998.
4. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы. М.: РХД, 2004.
5. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М.: РХД, 2005.
6. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Ин-т компьютерных иссл., 2002.