

А. Э. А д и г а м о в, А. В. Ю д е н к о в (Москва, МГГУ). **Математическая модель первой основной задачи теории упругости.**

Известно, что основные задачи теории упругости можно представить в виде краевых задач для бианалитических функций, которые являются естественным обобщением аналитических функций. Функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ комплексной переменной $z = x + iy$ называется *бианалитической* [1] в некоторой области D , если она в D имеет непрерывные частные производные по x и y до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению $\partial^2 F / \partial \bar{z}^2 = 0$, где $\partial / \partial \bar{z} = (1/2)(\partial / \partial x + i \partial / \partial y)$ — дифференциальный оператор Коши–Римана.

Основная область их применения — плоская теория упругости однородного тела [3].

Например, математическую модель первой основной задачи можно сформулировать следующим образом: найти неизвестную бианалитическую функцию $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ в области D , ограниченной гладким контуром L , по некоторым краевым условиям.

В теории аналитических функций хорошо известен тот факт, что если аналитическая функция обращается в ноль на некотором контуре плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, то она является тождественным нулем на всей плоскости. Такое утверждение (и аналогичные ему) называется *теоремой единственности аналитической функции*. С точки зрения краевых задач можно утверждать, что задача $\Phi(t) = 0$, $t \in L$, не имеет нетривиальных решений. Для бианалитической функции такое утверждение неверно.

Рассмотрим, например, функцию $F(z) = 1 - z\bar{z}$. Данная функция обращается в ноль на единичной окружности Γ (Γ : $\sigma \in \Gamma$, $\sigma\bar{\sigma} = 1$), однако не является тождественным нулем на всей плоскости комплексного переменного.

Таким образом, краевая задача для бианалитических функций $F(t) = 0$, $t \in L$, может иметь нетривиальное решение.

В этой краевой задаче имеется только одно условие, а для однозначного решения необходимо два независимых условия.

Пусть некоторая бианалитическая функция обращается в ноль на двух концентрических окружностях, одна из которых имеет радиус $R_1 = 1$, а другая $0 < R_2 < 1$.

Запишем следующие граничные условия: $F(t_1) = 0$, $t_1 \in L_1$, $F(t_2) = 0$, $t_2 \in L_2$.

Заметим, что на окружностях L_1 и L_2 выполняются условия $\bar{t}_1 = 1/t_1$, $\bar{t}_2 = R_2^2/t_2$.

Пусть $\varphi_0(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + \dots + a_n^0 z^n + \dots$, $\varphi_1(z) = a_0^1 + a_1^1 z + a_2^1 z^2 + \dots + a_n^1 z^n + \dots$.

Тогда, учитывая эти условия, получим, что для выполнения краевых условий необходимо и достаточно, чтобы выполнялись требования: $a_0^1 = 0$, $\dots$, $a_{n-1}^0 + a_n^1 = 0$, $a_{n-1}^0 + R_2^2 a_n^1 = 0$, $\dots$.

Поскольку $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & R_2 \end{pmatrix} \neq 0$, то это условие равносильно тому, что $\varphi_0(z) = 0$ и $\varphi_1(z) = 0$, т. е. $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) \equiv 0$.

Таким образом, доказано утверждение. Если бианалитическая функция обращается в ноль на двух концентрических окружностях, то она — тождественный ноль. Доказанное утверждение — один из возможных аналогов теоремы единственности для аналитических функций на классе бианалитических функций.

Предположим, что однородное изотропное тело занимает область D , представляющую собой внутренность единичного круга. Положим также, что на контуре L известна всего одна составляющая внешних усилий, прикладываемых к телу, например, Y_n . Требуется определить деформацию тела. Очевидно, что в такой постановке задача имеет неоднозначное решение.

Предположим, что нагрузку Y_n удалось определить не только на внешнем контуре L_1 , но и на контуре L_2 (L_2 : $t_2 \in L_2 \Rightarrow t_2 \bar{t}_2 = R_2^2$, $0 < R_2 < 1$), который можно мысленно вырезать в единичном круге.

Для того чтобы доказать, что система однозначно определяет бианалитическую функцию и, следовательно, напряженное состояние тела, докажем, что соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение. Для этого используем теорию краевых задач для аналитических функций. Рассмотрим следующие аналитические функции: $\Phi_1^+(z) = \varphi_0'(z)z + \varphi_1'(z) + \varphi_1(z)z$, $\Phi_2^+(z) = \varphi_0'(z)z + R_2^2 \varphi_1'(z) + \varphi_1(z)z$.

Доопределим их на всю плоскость комплексного переменного. Тогда однородная задача примет вид: $\Phi_1^+(t_2) = \Phi_1^-(t_1)$, $\Phi_2^+(t_2) = \Phi_2^-(t_2)$.

Данная система представляет собой две однородные задачи о скачке для аналитических функций. Данные задачи [2] имеют только тривиальное решение. Следовательно, $\varphi_0'(z)z + \varphi_1'(z) + \varphi_1(z)z = 0$, $\varphi_0'(z)z + R_2^2 \varphi_1'(z) + \varphi_1(z)z = 0$.

Отсюда, $\varphi_1'(z) = 0$, $\varphi_0'(z) = -\varphi_1(z) = \text{const}$. В силу начальных условий $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) \equiv 0$. Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балж М. Б. Полианалитические функции и их обобщения. — Итоги науки и техники ВИНТИ / Сер. Совр. Проблемы матем. Фунд. напр., т. 85. М: ВИНТИ, 1991, с. 187–246.
2. Гатов Ф. Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977, 640 с.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.