С. А. Б а т ы г о в а (Ростов-на-Дону, РГЭУ «РИНХ»). **Единственность обобщенных решений начально-краевых задач моделей Маргерра–Власова колебаний пологих оболочек с шарнирным закреплением края.**

Обобщенными решениями начально-краевой задачи (см. [1]) называются функции $w \in B_2(Q)$, $u, v \in B_1(Q)$, $Q \equiv \Omega \times [0, t_f]$, удовлетворяющие следующему интегральному соотношению:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \left\{ \left[-w_t w'_t - \gamma \nabla w_t \nabla w'_t + D \Delta w \Delta w' + \delta \Delta w_t \Delta w' \right. \right. \\ & \quad + (N_1 k_1 + N_2 k_2) w' + (N_1 w_{x_1} + N_{12} w_{x_2}) w'_{x_1} + (N_{12} x_{x_1} + N_2 w_{x_2}) w'_{x_2} \\ & \quad - u_t u'_t - v_t v'_t + \nabla u \nabla u' + \nabla v \nabla v' + \frac{1+\mu}{1-\mu} (u_{x_1} + v_{x_2}) (u'_{x_1} + v'_{x_2}) \\ & \quad + \frac{2}{1-\mu} (k_1 w + \mu k_2 w + \frac{1}{2} w_{x_1}^2 + \frac{1}{2} \mu w_{x_2}^2) u'_{x_1} \\ & \quad + \frac{2}{1-\mu} (k_2 w + \mu k_1 w + \frac{1}{2} w_{x_2}^2 + \frac{1}{2} \mu w_{x_1}^2) v'_{x_1} \\ & \quad \left. + w_{x_1} w_{x_2} (u'_{x_2} + v'_{x_1}) - Z w' - X u' - Y v' \right] dx \\ & \quad - (\mu + 1) \int_{\Gamma} \chi \left(D \frac{dw}{dn} \frac{dw'}{dn} + \delta \frac{dw_t}{dn} \frac{dw'_t}{ds} \right) ds \Big\} dt \\ & - \int_{\Omega} (w_t w'_t + u_t u'_t + v_t v'_t) dx = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

для любых функций $w' \in \dot{B}_2(Q)$, $u', v' \in \dot{B}_1(Q)$, и удовлетворяющие начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\|w(\cdot, 0) - w_0\|_{L_2(\Omega)} + \|u(\cdot, 0) - u_0\|_{L_2(\Omega)} + \|v(\cdot, 0) - v_0\|_{L_2(\Omega)} \right) = 0. \quad (2)$$

Приведенное определение обобщенных решений аналогично предложенному в [2, с. 774–775].

Теорема 1 (существования обобщенного решения начально-краевой задачи). Пусть граница $\Gamma \in C^3$ области Ω имеет ограниченные четвертые производные. Пусть $w_0 \in \dot{H}_2^2(\Omega, \mu)$, $w_1 \in L_2(\Omega)$, $X, Y, Z \in L_2(Q)$, $\delta > 0$. Тогда существуют обобщенные в смысле (1), (2) решения w, u, v начально-краевой задачи, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w \in B_2(Q) \cap L_{2,\infty}^{2,0}(Q) \cap L_{2,\infty}^{0,1}(Q), \quad u, v \in B_1(Q) \cap L_{2,\infty}^{1,0}(Q).$$

Доказательство осуществляется при помощи метода Бубнова–Галеркина по схеме, сходной с предложенной в [2, с. 751–759], при учете оценок следующих из энергетического соотношения.

Теорема 2 (единственности обобщенных решений). В условиях теоремы 1 обобщенное решение единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существуют обобщенные решения w^1, u^1, v^1 и w^2, u^2, v^2 с одинаковыми данными. Положим $w^0 = w^1 - w^2$, $u^0 = u^1 - u^2$, $v^0 = v^1 - v^2$. Из (1) получаем, что w^0, u^0, v^0 удовлетворяют интегральному соотношению

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \left\{ \int_{\Omega} \left[-w_t^0 w'_t - \gamma \nabla w_t^0 \nabla w'_t + D \Delta w^0 \Delta w' + \delta \Delta w_t^0 \Delta w' \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left((N_1^1 - N_1^2) k_1 + (N_2^1 - N_2^2) k_1 \right) w' \right] dx \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((N_1^1 - N_1^2)w_{x_1}^1 + N_1^2w_{x_1}^0 + (N_{12}^1 - N_{12}^2)w_{x_2}^1 + N_{12}^2w_{x_2}^0 \right) w'_{x_1} \\
& + \left((N_{12}^1 - N_{12}^2)w_{x_1}^1 + N_{12}^2w_{x_1}^0 + (N_2^1 - N_2^2)w_{x_2}^1 + N_2^2w_{x_2}^0 \right) w'_{x_2} \\
& - u_t^0 u'_t - v_t^0 v'_t + \nabla u^0 \nabla u' + \nabla v^0 \nabla v' + \frac{1+\mu}{1-\mu} (u_{x_1}^0 + v_{x_2}^0) (u'_{x_1} + v'_{x_2}) \\
& + \frac{2}{1-\mu} \left(k_1 w^0 + \mu k_2 w^0 + \frac{1}{2} w_{x_1}^0 (w_{x_1}^1 + w_{x_1}^2) + \frac{1}{2} \mu w_{x_2}^0 (w_{x_2}^1 + v_{x_2}^2) \right) u'_{x_1} \\
& + \frac{2}{1-\mu} \left(k_2 w^0 + \mu k_1 w^0 + \frac{1}{2} w_{x_2}^0 (w_{x_2}^1 + w_{x_2}^2) + \frac{1}{2} \mu w_{x_1}^0 (w_{x_1}^1 + v_{x_1}^2) \right) v'_{x_2} \\
& + (w_{x_1}^0 w_{x_2}^1 + w_{x_2}^0 w_{x_1}^2) (u'_{x_1} + v'_{x_2}) \Big] dx \\
& - (\mu + 1) \int_{\Gamma} \chi \left(D \frac{dw^0}{dn} \frac{dw'}{dn} + \delta \frac{dw_t}{dn} \frac{dw'}{dn} \right) ds \Big\} dt \tag{3}
\end{aligned}$$

для любых $w \in \dot{B}_2(Q)$, $u', v' \in \dot{B}_1(Q)$ при

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\|w_t^0(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u^0(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|v^0(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} \right) = 0.$$

Первое интегральное неравенство. Положим

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \frac{1}{2} \|w_t^0(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \gamma \|w_t^0(\cdot, t)\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)}^2 \\
&+ \frac{1}{2} D \|w^0(\cdot, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega, \mu)}^2 + \delta \int_0^t \|w_t^0(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega, \mu)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Лемма 1. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место следующее неравенство:

$$\xi(t) \leq \sigma_1 \int_0^t \left(\xi(\tau) + \|u^0(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)}^2 + \|v^0(\cdot, \tau)\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)}^2 \right) d\tau, \tag{4}$$

где константа σ_1 не зависит от времени t .

Второе основное неравенство. Введем в рассмотрение величину

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= \|u_t(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_t(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_t(\cdot, t)\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)}^2 + \|v_t(\cdot, t)\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)}^2 \\
&+ \frac{1+\mu}{1-\mu} \|u_{x_1}(\cdot, t) + v_{x_2}(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Лемма 2. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место следующее неравенство:

$$\eta(t) \leq \sigma_2 \int_0^1 \left(\xi(\tau) + \eta(\tau) \right) d\tau, \tag{5}$$

где константа σ_2 не зависит от времени t .

Положим $\theta(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Очевидно, $\theta(t)$ непрерывна и неотрицательна. Из (4) и (5) получаем, что для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место неравенство $\theta(t) \leq \sigma_3 \int_0^t \theta(\tau) d\tau$, где константа σ_3 не зависит от времени t , откуда в силу неравенства Гронвуола следует, что $\theta(t) \equiv 0$.

Выражаю благодарность за постановку задачи и помощь в работе проф. В. И. Седенко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седенко В. И., Батыгова С. А., Сердюкова Е. В.* Изв. вузов., Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки, 2005, № 1, с. 28–31.
2. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебания пологих оболочек. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 6, с. 747–784.