

Е. И. Б е л и к о в а (Ульяновск, УлГУ). **Об управлении относительно-ми движениями маятника на вращающемся основании.**

Моделирование ряда прикладных задач об управлении механическими системами, например, простыми робототехническими, сводится к задаче управления двух-массовой системой, состоящей из твердого тела (основания) и прикрепленного к нему маятника [1]. Тело может свободно вращаться вокруг вертикальной оси Z . Маятник (или ротатор) совершает относительные плоские колебания или вращения вокруг оси, проходящей через указанную вертикальную ось Z ортогонально ей.

Решается задача управления относительно-ми движениями маятника посредством регулируемой скоростью вращения основания.

Выражения для кинетической T и потенциальной энергии Π имеют вид:

$$T = \frac{1}{2}I(\theta)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mld\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta, \quad \Pi = mgl(1 - \cos\theta).$$

Уравнения движения в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}[I(\theta)\dot{\varphi} + mld\dot{\theta}\cos\theta] = M_{\varphi}, \quad I(\theta) = I_0 + m(d^2 + l^2\sin^2\theta),$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mld\ddot{\varphi}\cos\theta - ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta + k\dot{\theta} = 0.$$

Здесь φ — угол поворота твердого тела, момент инерции которого I_0 ; θ — угловая переменная маятника массы m и длины l ; d — расстояние от оси вращения основания до точки подвеса маятника («плечо»), k — коэффициент вязкого трения. Функция $I(\theta)$ имеет смысл приведенного мгновенного момента инерции системы относительно оси Z , удовлетворяя условиям $I_0 + md^2 \leq I(\theta) \leq I_0 + m(d^2 + l^2)$.

Пусть переменная φ регулируется кинематически, так что существует $\varphi = \varphi_0(t)$, при котором имеется заданное движение $\theta = \theta_0(t)$,

$$ml^2\ddot{\theta}_0(t) + k\dot{\theta}_0(t) + mld\ddot{\varphi}_0(t)\cos\theta_0(t) - ml^2\dot{\varphi}_0^2(t)\sin\theta_0(t)\cos\theta_0(t) + mgl\sin\theta_0(t) = 0.$$

Задача управления будет решенной, если найти условия, при которых движение $\theta = \theta_0(t)$ является асимптотически устойчивым.

Введем отклонение $x = \theta - \theta_0(t)$ истинного движения маятника от заданного, т. е. $\theta = \theta_0(t) + x$. Тогда уравнение возмущенного движения будет иметь вид

$$\ddot{x} + \frac{k}{ml^2}\dot{x} + 2f(t, x)\sin\frac{x}{2} = 0,$$

где

$$f(t, x) = -\frac{d}{l}\ddot{\varphi}_0(t)\sin\left(\theta_0(t) + \frac{x}{2}\right) - \dot{\varphi}_0^2(t)\cos\frac{x}{2}\cos 2\left(\theta_0(t) + \frac{x}{2}\right) + \frac{g}{l}\cos\left(\theta_0(t) + \frac{x}{2}\right).$$

На основе функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x} + kx)^2 + 4f(t, x)\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)$$

и теоремы из [2] находим следующие условия асимптотической устойчивости управляемого движения $\theta = \theta_0(t)$:

$$0 < f_0 \leq f(t, 0) \leq f_1, \quad \frac{2k}{ml^2}f(t, 0) - \frac{\partial f(t, 0)}{\partial t} \geq \alpha_0 > 0.$$

Проведены аналитические и численные реализации исследуемой модели при различных законах задания движения $\theta = \theta_0(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08–01–00741.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л. Д.* Управление относительными движениями маятника на вращающемся основании. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2000, т. 64, в. 2, с. 205.
2. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1984, т. 48, в. 2, с. 225–232.