

А. Ю. Богданов (Ульяновск, УлГУ). **Топологическая динамика не-
явных дискретных систем и включений.**

Сходимость многих алгоритмов стохастической и негладкой оптимизации является следствием устойчивости траекторий некоторых дискретных включений [1]. К исследованию устойчивости дискретных включений сводятся многие задачи управления и автоматического регулирования, теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим неавтономное дискретное включение вида

$$x(n+1) \in F(n, x(n)), \quad (1)$$

где $x \in \mathbf{R}^m$, $F: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^m \rightarrow 2\mathbf{R}^m$ — множественно-значное отображение, т. е. для всех $n \in \mathbf{Z}$ и $x \in \mathbf{R}^m$ имеется множество точек $F(n, x) \subset \mathbf{R}^m$ (возможно, пустое).

Предположение 1. Для каждого $n \in \mathbf{Z}$ множество $\{(x, y): y \in F(n, x)\}$ замкнуто в $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$. В частности, все значения отображения F замкнуты.

Определение 1. Определим обратное отображение для F следующим образом: $F^{-1}(n, x) = \{z: x \in F(n-1, z)\}$. При этом включение $x(n+1) \in F^{-1}(n, x)$ соответствует направлению дискретного времени, измененному на противоположное.

Определение 2. Пусть $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ является решением (1). Назовем *положительным предельным множеством* этого решения $\Omega^+(n_0, x_0)$ множество всех векторов $p \in \mathbf{R}^m$: $p = \lim_{n_k \rightarrow +\infty} x(n_k, n_0, x_0)$. В частности, если $x(n, n_0, x_0)$ определено только для конечного числа $n > 0$, то $\Omega^+(n_0, x_0) = \emptyset$.

Инвариантность положительного предельного множества в автономном случае представлена в работе [2]. Развивая подход работы [2], получим обобщение этих результатов, используя аппарат предельных уравнений. *Сдвигом* отображения $F(n, x)$ на целое число k называется отображение $F_k(n, x) = F(n+k, x)$. Заметим, что задача нахождения решения $x(n+1) \in F(n, x(n))$, $x(k) = x_0$, эквивалентна задаче $x(n+1) \in F_k(n, x(n))$, $x(0) = x_0$.

Определение 3. Отображение $F^*(n, x): \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ является ℓ -пределом последовательности множественно-значных отображений $F_k(n, x): \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$, обеспечивающим $y \in F^*(n, x)$, если и только если $(x, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, y_k)$, где $y_k \in F_k(n, x_k)$.

Здесь символ « ℓ » означает «нижний», и сходимость порождается существованием нижнего предела последовательности множеств (графиков отображений F_k в нашем случае), см. [3].

Определение 4. Дискретное включение $x(n+1) \in F^*(n, x(n))$ называется ℓ -предельным уравнением для $x(n+1) \in F(n, x(n))$, если существует такая последовательность $n_k \rightarrow +\infty$, что $F^*(n, x)$ является ℓ -пределом для $\{F_{n_k}(n, x) = F(n+n_k, x)\}$ при $k \rightarrow +\infty$.

Замечание 1. Легко видеть, что ℓ -предел $F^*(n, x)$ также будет удовлетворять условиям предположения 1. Кроме того, *любая* последовательность $n_k \rightarrow +\infty$ определяет некоторое предельное уравнение, т. к. ℓ -предел будет корректно задан. Такая ситуация не сохраняется для разностных уравнений, а также для других типов уравнений, например, ОДУ. В этих случаях даже существование одного предельного уравнения зачастую не очевидно.

Теорема 1. Пусть $x(n, n_0, x_0)$ является ограниченным решением включения (1). Тогда для каждого $p \in \Omega^+(n_0, x_0)$ существует ℓ -предельное уравнение $y(n+1) \in F^*(n, y(n))$, решение которого $y(n) = y(n, 0, p)$ определено для всех $n \in \mathbf{Z}$ и $y(n) \in \Omega^+(n_0, x_0)$, для всех $n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, $\Omega^+(n_0, x_0)$ квазиинвариантно относительно семейства ℓ -предельных уравнений.

Теорема 2. Если для каждого ограниченного множества $D \subset \mathbf{R}^m$ множество $\cup_{n \geq n_0, x \in D} \{F(n, x)\}$ ограничено в $\mathbf{R}^m$, то положительное предельное множество $\Omega^+(n_0, x_0)$ любого решения $x(n, n_0, x_0)$ включения (1) положительно квазиинвариантно, т. е. для любого $p \in \Omega^+(n_0, x_0)$ существует ℓ -предельное уравнение

$y(n+1) \in F^*(n, y(n))$, решение которого $y(n) = y(n, 0, p)$ определено для всех $n \in \mathbf{Z}^+$ и $y(n) \in \Omega^+(n_0, x_0)$ для всех $n \in \mathbf{Z}^+$. Множество $\Omega^+(n_0, x_0)$ отрицательно квазиинвариантно, если для каждого ограниченного множества $D \subset \mathbf{R}^m$ множество $\bigcup_{n \geq n_0, x \in D} \{F^{-1}(n, x)\}$ ограничено в $\mathbf{R}^m$.

Теорема 3 (модификация теоремы 1). Пусть $x(n, n_0, x_0)$ является ограниченным решением включения (1). Тогда для каждого ℓ -предельного уравнения $y(n+1) \in F^*(n, y(n))$ существует такая точка $p \in \Omega^+(n_0, x_0)$, что решение предельного уравнения $y(n) = y(n, 0, p)$ определено для всех $n \in \mathbf{Z}$ и $y(n) \in \Omega^+(n_0, x_0)$ для всех $n \in \mathbf{Z}$.

З а м е ч а н и е 2. Важным частным случаем теоремы 3 является ситуация, когда $x(n, n_0, x_0) \rightarrow p$ при $n \rightarrow +\infty$. Тогда p является точкой равновесия для каждого предельного уравнения, т. е. $F^*(n, p) = p$ для всех $n \geq 0$ и F^* .

З а м е ч а н и е 3. Квазиинвариантность положительного предельного множества, установленная нами для класса ℓ -предельных уравнений, может быть распространена на некоторый новый (большой) класс дискретных включений, обладающий свойством, что график любого ℓ -предельного уравнения содержится в графике некоторого элемента соответствующего большего класса, который, возможно, будет легче определить.

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что множество $H \subset \mathbf{R}^m$ устойчиво относительно включения (1), если для всех $n_0 \in \mathbf{Z}^+$ для данной окрестности U множества H (U открыто, замыкание $\bar{H} \subset U$) существует такая окрестность $W = W(n_0)$ множества H , что $F_{n_0}^n(W) \subset U$ для всех $n \in \mathbf{Z}^+$. Здесь $F_{n_0}^0 = I$, $F_{n_0}^{n+1} = F(n_0 + n, F_{n_0}^n(x))$.

Предложение 1. Если H устойчиво, то $\bar{H}$ положительно инвариантно относительно включения (1). В частности, если точка устойчива, то это точка равновесия.

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением только замкнутых положительно инвариантных множеств.

Важным случаем, когда появляются дискретные включения, является случай управляемых систем

$$x(n+1) = f(n, x(n), u), \quad (2)$$

где управление u принадлежит множеству допустимых управлений $u \in U \subset \mathbf{R}^k$. При этом допустимые траектории (решения) совпадают с решениями дискретного включения (1), где $F(n, x) = \{f(n, x, u) : u \in U\}$. Предельные уравнения для (2), при достаточно общих предположениях (см. [4]), могут быть представлены в форме (2).

Главным преимуществом предложенного подхода является то, что сейчас мы можем методами топологической динамики исследовать разностные уравнения, которые не являются простыми линейными итерациями, например,

$$x(n+1) = f(n, x(n), x(n+1)). \quad (3)$$

Решением уравнения (3) является такая дискретная функция $\varphi(n)$, что $\varphi(n+1) \equiv f(n, \varphi(n), \varphi(n+1))$, $n \in (M, N)$. Таким образом, здесь приходится «решать» уравнение, а не просто итерировать отображение. Так как (3) является векторным уравнением (системой), то к этой форме сводится любое уравнение $x(n+1) = f(n, x(n-k), \dots, x(n), x(n+1))$ порядка $k \geq 2$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-97010р (Поволжье).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завершев С. К., Перевозчиков А. Г.* Прямой метод Ляпунова в исследовании притяжения траекторий конечно-разностных включений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1990, т. 30, № 1, с. 22–32.
2. *Artstein Z.* On the limiting equations and invariance of time-dependent difference equations. — In: Proceedings of NSF conference «Stability of dynamical systems (Theory and applications)». Mississippi State University, 1976, p. 3–9.
3. *Курастовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
4. *Богданов А. Ю.* Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления. Ульяновск: изд-во УлГТУ, 2008, 262 с.