В. Л. П е т р о в (Москва, МГГУ). **Математическое обеспечение для синтеза спектральных моделей электромеханических систем на основе решения уравнения Винера–Хопфа.**

Для выявления взаимосвязи между корреляционными функциями системы и ее ИПХ используем уравнение Винера–Хопфа, связывающее корреляционные функции координат ЭМС с его импульсной переходной характеристикой

$$R_{pu}(\tau) = \int_0^\infty R_{pp}(\tau-\theta) h_\delta(\theta)\, d\theta, \tag{1}$$

где $R_{pu}(\tau)$ — взаимокорреляционная функция управляющего (возмущающего) воздействия и потребляемой мощности ЭМС; $R_{pp}(\tau-\theta)$ — автокорреляционная функция потребляемой ЭМС.

Задача определения параметров математической модели ЭМС сводится к решению интегрального уравнения (1) относительно импульсной переходной характеристики $h_\delta(\theta)$.

Представим автокорреляционную функцию потребляемой мощности $R_{pp}(\tau)$ в виде разложения в ряд ортогональных функций: $R_{pp}(\tau) = \sum_{k=0}^\infty \psi_k^{pp}\phi_k(\tau)$, где $\psi_k^{pp} = \int_0^\infty R_{pp}(\tau)\phi_k(\tau)\,d\tau$ — коэффициенты разложения корреляционной функции $R_{pp}(\tau)$; $\phi_k(\tau)$ — определенные функции из ортогонального базиса.

Дальнейшие преобразования позволяют записать уравнение Винера–Хопфа в виде

$$\sum_{i=0}^\infty \psi_i^{pu}\phi_i(\tau) = \sum_{j=0}^\infty \psi_j^w \sum_{k=0}^\infty \psi_k^{pp} \int_0^\infty \phi_k(\tau-\theta)\phi_j(\theta)\,d\theta.$$

Введя ограничения в модельные спектральные суммы, получим следующую формулу:

$$\sum_{i=0}^{n_0} \psi_i^{pu}\phi_i(\tau) = \sum_{j=0}^{n_1} \psi_j^h \sum_{k=0}^{n_2} \psi_k^{pp} \int_0^\infty \phi_k(\tau-\theta)\phi_j(\theta)\,d\theta, \tag{2}$$

где n_0, n_1, n_2 — числа, определяющие длину спектральных моделей; ψ_j^h — коэффициенты разложения (компоненты спектральной модели) ИПХ ЭМС.

Запишем решения уравнений (2) для различных базисных систем синтезированных преобразованных ортонормированных (СПОФ) функций с учетом их формализации [1]:

а) для СПОФ Чебышева–Лежандра

$$\sum_{i=0}^{n_0} \chi_i^{pu}\widehat{P}_{i\infty}(\tau) = \sum_{j=0}^{n_1} \chi_j^h \sum_{k=0}^{n_2} \chi_k^{pp} \int_0^\infty \widehat{P}_{k\infty}(u,\tau-\theta)\widehat{P}_{j\infty}(\theta)\,d\theta$$

или

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n_0} \chi_i^{pu}(-1)^n\sqrt{u(2i+1)}[\Gamma(i+1)]^2 e^{-u\tau(i+1/2)} \sum_{q=0}^{i}\left\{\frac{1}{\Gamma(q+1)[\Gamma(i-q+1)]^2}\right. \\
&\quad\times\left.\sum_{l=0}^{q}\frac{(-1)^l e^{u\tau q}}{\Gamma(l+1)\Gamma(q-l+1)}\right\} = \sum_{j=0}^{n_1}\chi_j^h\sum_{k=0}^{n_2}\chi_k^{pp}\int_0^\infty(-1)^n\sqrt{u(2k+1)}[\Gamma(k+1)]^2 \\
&\quad\times e^{-u(\tau-\theta)(k+1/2)}\sum_{q=0}^{k}\left\{\frac{1}{\Gamma(q+1)[\Gamma(k-q+1)]^2}\sum_{l=0}^{q}\frac{(-1)^l e^{u(\tau-\theta)l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(q-l+1)}\right\} \\
&\quad\times(-1)^n\sqrt{u(2j+1)}[\Gamma(j+1)]^2 e^{-u\theta(j+1/2)}\sum_{k=0}^{j}\left\{\frac{1}{\Gamma(k+1)[\Gamma(j-k+1)]^2}\right.
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{l=0}^{q} \frac{(-1)^l e^{u\theta l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(q-l+1)} \Bigg\} \, d\theta, \tag{3}$$

где χ_i^{pu} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pu}(\tau)$ в базисе Чебышева–Лежандра; χ_k^{pp} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pp}(\tau)$ в базисе СПОФ Чебышева–Лежандра; χ_j^h — компоненты спектральной модели ИПХ ЭМС в базисе СПОФ Чебышева–Лежандра;

б) для СПОФ Якоби

$$\sum_{i=0}^{n_0} \gamma_i^{pu} J_{i\infty}(\tau) = \sum_{j=0}^{n_1} \gamma_j^h \sum_{k=0}^{n_2} \gamma_k^{pp} \int_0^\infty \widehat{J}_{k\infty}(u, \tau-\theta) \widehat{J}_{j\infty}(\theta)\, d\theta$$

или

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n_0} \gamma_i^{pu} (-1)^{(2n+h)/2} \sqrt{u\Gamma(a+i+1)^2 \Gamma(i+1)\Gamma(a+b+i+1)(a+b+2i+1)} \\
&\qquad \times e^{-u\tau(a+b+2n+1)/2} \sum_{q=0}^{i} \frac{[1-e^{u\tau}]^{(2q+b)/2}}{\Gamma(q+1)\Gamma(i-q+1)\Gamma(a+i-q+1)\Gamma(b+q+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{n_1} \gamma_j^h \sum_{k=0}^{n_2} \gamma_k^{pp} \int_0^\infty (-1)^{(2k+b)/2} \sqrt{u\Gamma(a+k+1)^2 \Gamma(k+1)\Gamma(a+b+k+1)(a+b+2k+1)} \\
&\qquad \times e^{-u(\tau-\theta)(a+b+2k+1)/2} \sum_{q=0}^{k} \frac{[1-e^{u(\tau-\theta)}]^{(2q+b)/2}}{\Gamma(q+1)\Gamma(k-q+1)\Gamma(a+k-q+1)\Gamma(b+q+1)} \\
&\qquad \times (-1)^{(2j+b)/2} \sqrt{u\Gamma(a+j+1)^2 \Gamma(j+1)\Gamma(a+b+j+1)(a+b+2j+1)} \\
&\qquad \times e^{(a+b+2j+1)/2} \sum_{q=0}^{j} \frac{[1-e^{u\theta}]^{(2q+b)/2}}{\Gamma(q+1)\Gamma(j-q+1)\Gamma(a+j-q+1)\Gamma(b+q+1)} \, d\theta,
\end{aligned} \tag{4}$$

где γ_i^{pu} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pu}(\tau)$ в базисе СПОФ Якоби; γ_k^{pp} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pp}(\tau)$ в базисе СПОФ Якоби; γ_j^h — компоненты спектральной модели ИПХ ЭМС в базисе СПОФ Якоби;

в) для СПОФ Чебышева–Лагерра

$$\sum_{i=0}^{n_0} \beta_i^{pu} \widehat{\phi}_{L_i}(\tau) = \sum_{j=0}^{n_1} \beta_j^h \sum_{k=0}^{n_2} \beta_k^{pp} \int_0^\infty \widehat{\phi}_{L_k}(\tau-\theta) \widehat{\phi}_{L_j}(\theta)\, d\theta$$

или

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n_0} \beta_i^{pu} \sqrt{\frac{2b\Gamma(i+1)}{\Gamma(a+i+1)}} e^{-bt} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(a+j+1)} \frac{2^j b^j \tau^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(i-j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{n_1} \beta_j^h \sum_{k=0}^{n_2} \beta_k^{pp} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2b\Gamma(k+1)}{\Gamma(a+k+1)}} e^{-b(\tau-\theta)} \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \frac{\Gamma(k+a+1)}{\Gamma(a+q+1)} \frac{2^q b^q (\tau-\theta)^q}{\Gamma(q+1)\Gamma(k-q+1)} \\
&\qquad \times \sqrt{\frac{2b\Gamma(j+1)}{\Gamma(a+j+1)}} e^{-b\theta} \sum_{q=0}^{j} (-1)^q \frac{\Gamma(j+a+1)}{\Gamma(a+q+1)} \frac{2^q b^q \theta^q}{\Gamma(q+1)\Gamma(j-q+1)} \, d\theta,
\end{aligned} \tag{5}$$

где β_i^{pu} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pu}(\tau)$ в базисе СПОФ Чебышева–Лагерра; β_k^{pp} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pp}(\tau)$ в базисе СПОФ Чебышева–Лагерра; β_j^h — компоненты спектральной модели ИПХ ЭМС в базисе СПОФ Чебышева–Лагерра;

г) для СПОФ Чебышева–Эрмита

$$\sum_{i=0}^{n_0} \vartheta_i^{pu} \widehat{\phi}_{L_i}(\tau) = \sum_{j=0}^{n_1} \vartheta_j^h \sum_{k=0}^{n_2} \vartheta_k^{pp} \int_0^\infty \widehat{\phi}_{L_k}(\tau-\theta)\widehat{\phi}_{L_j}(\theta)\, d\theta$$

или

$$\begin{aligned} &\vartheta_i^{pu} \sqrt{\frac{u}{2^i \Gamma(i+1)\sqrt{\pi}}} e^{-(ut)^2/2} \sum_{k=0}^{[i/2]} \frac{(-1)^k \Gamma(i+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(i-2k+1)} (2ut)^{i-2k} \\ &= \sum_{j=0}^{n_1} \vartheta_j^h \sum_{k=o}^{n_2} \vartheta_k^{pp} \int_0^\infty \sqrt{\frac{u}{2^n \Gamma(k+1)\sqrt{\pi}}} e^{-(ut)^2/2} \sum_{q=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^q \Gamma(k+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(k-2q+1)} [2u(\tau-\theta)]^{k-2q} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{u}{2^n \Gamma(j+1)\sqrt{\pi}}} e^{-(ut\theta)^2/2} \sum_{q=0}^{[j/2]} \frac{(-1)^q \Gamma(j+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(j-2q+1)} (2u\theta)^{j-2q}\, d\theta, \end{aligned} \qquad (6)$$

где ϑ_i^{pu} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pu}(\tau)$ в базисе СПОФ Чебышева–Эрмита; ϑ_k^{pp} — компоненты спектральной модели корреляционной функции $R_{pp}(\tau)$ в базисе СПОФ Чебышева–Эрмита; ϑ_j^h — компоненты спектральной модели ИПХ ЭМС в базисе СПОФ Чебышева–Эрмита.

Анализ (3)–(6) показывает: определение спектральных моделей ЭМС (ИПХ и корреляционных функций) сводится к решению систем уравнений, формирование которых осуществляется в зависимости от вида СПОФ; устойчивость решения систем уравнений определяется выбором параметров СПОФ и размерностью используемых для спектральных моделей динамических характеристик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров В. Л.* Идентификация моделей электромеханических систем с использованием спектральных методов анализа в базисах непрерывных ортонормированных функций. — Мехатроника, автоматизация, управление, 2003, № 10, с. 29–36.