

Г. И. Белявский, Т. А. Гробер (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Интерполяция неполного рынка рынком Кокса–Росса–Рубинштейна с динамически изменяющимися параметрами с заданной степенью точности.**

Рассматривается задача аппроксимации финансового обязательства $f(x)$ на интервале $[a, b]$ кусочно-постоянной функцией, с последующим построением бинарного рынка, реплицирующего кусочно-постоянное финансовое обязательство.

Рассмотрим вторую из этих задач.

Будем считать, что на $[a, b]$ задана плотность распределения вероятностей $P(x)$, причем эта плотность такова, что математическое ожидание $E(x) = S_0$, где S_0 — начальная стоимость акции.

Допустим, что $[a, b]$ разбит на $n = 2^k$ подинтервалов. Значение стоимости акции постоянно на каждом подинтервале. Затем строится бинарный рынок (см. рис.). Определим значение стоимости акции на k -м слое:

$$S_i^k = \frac{1}{p_i^k} \int_{l_{i-1}}^{l_i} x p(x) dx, \quad p_i^k = \int_{l_{i-1}}^{l_i} p(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k.$$

Допустим, нам известны значения стоимости акции на слое с номером m . Тогда значения стоимости акции на слое $m - 1$ вычисляются по формулам

$$\begin{cases} S_i^{m-1} = \frac{S_{2i-1}^m p_{2i-1}^m + S_{2i}^m p_{2i}^m}{p_{2i-1}^m + p_{2i}^m}, \\ p_i^{m-1} = p_{2i-1}^m + p_{2i}^m, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 2^k, \quad m = k, k-1, \dots, 1.$$

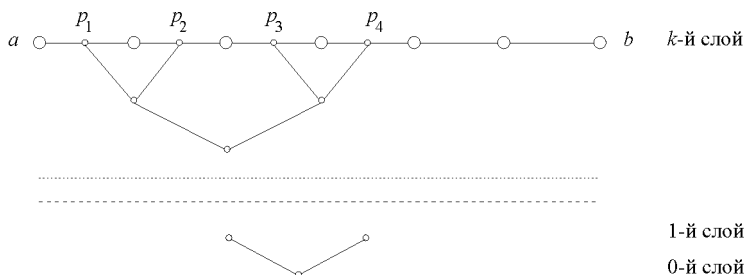


Рис. Схема построения рынка

В результате мы получили полный (B, S) -рынок, который воспроизводит финансовое обязательство с заданной степенью точности.

Рассмотрим первую задачу.

Пусть задан подинтервал $[l_i, l_{i+1}]$. Его требуется разбить на два подинтервала, а также выбрать оптимальным образом значение кусочно-постоянной функции на каждом из двух подинтервалов.

Задача выглядит следующим образом:

$$\min_{\alpha, g, e} \left(\int_{l_i}^{\alpha} (f(x) - g)^2 p(x) dx + \int_{\alpha}^{l_{i+1}} (f(x) - e)^2 p(x) dx \right). \quad (1)$$

При фиксированной точке разбиения α оптимальными для g и e будут

$$g = \frac{\int_{l_i}^{\alpha} f(x) p(x) dx}{\int_{l_i}^{\alpha} p(x) dx}, \quad e = \frac{\int_{\alpha}^{l_{i+1}} f(x) p(x) dx}{\int_{\alpha}^{l_{i+1}} p(x) dx}.$$

После подстановки этих значений в (1) возникает следующая задача по выбору α :

$$\max_{\alpha} \left[\frac{\int_{l_i}^{\alpha} f^2(x)p(x) dx}{\int_{l_i}^{\alpha} p(x) dx} + \left(\frac{\int_{l_i}^{\alpha} f(x)p(x) dx}{\int_{l_i}^{\alpha} p(x) dx} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\int_{\alpha}^{l_{i+1}} f^2(x)p(x) dx}{\int_{\alpha}^{l_{i+1}} p(x) dx} + \left(\frac{\int_{\alpha}^{l_{i+1}} f(x)p(x) dx}{\int_{\alpha}^{l_{i+1}} p(x) dx} \right)^2 \right].$$

Предложено решение этой задачи.

Таким образом, изложен метод, позволяющий построить бинарный рынок, являющийся полным и безарбитражным, и воспроизвести финансовое обязательство с заданной степенью точности.