Н. В. Д а н и л о в а (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Хеджирование сверху для класса моделей неполного рынка.**

Рассматривается параметрическое семейство (B,S)-рынков:

$$\begin{aligned} &B_n = B_{n-1}(1+r),\\ &S_n = S_{n-1}(1+r)^{1-\delta_{n-1}}((1+b)^{\delta_{n-1}\delta_n}(1+a)^{\delta_{n-1}(1-\delta_n)}p\\ &\qquad + (1+a)^{\delta_{n-1}\delta_n}(1+b)^{\delta_{n-1}(1-\delta_n)}(1-p)), \end{aligned} \tag{1}$$

в обобщение модели, рассмотренной в [2]. Параметр $p \in [0,1]$ считается неизвестным и отражает внешнее влияние на рынок; $(\delta_i)_{i\geqslant 0}$ — двоичная последовательность случайных величин, $\delta_0 = 1$. Отметим, что параметр p всегда таков, что рынок безарбитражен.

Теорема. *Рынок будет безарбитражен тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) $p \in [0, \min M(a,b,r) \cup \max M(a,b,r), 1]$,

где $\quad M(a,b,r) = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{r-a}{b-a}, \dfrac{b-r}{b-a}\right\}$,

2) $p = 1/2$, $r = (a+b)/2$.

При этом множество мартингальных мер имеет вид

$$\mathbf{P}\{\delta_n = 1|\delta_{n-1} = 0\} = 1 - x_n, \quad \mathbf{P}\{\delta_n = 0|\delta_{n-1} = 0\} = x_n,$$

$$\mathbf{P}\{\delta_n = 1|\delta_{n-1} = 1\} = p^* = \begin{cases} \dfrac{r-ap-bq}{(b-a)(p-q)}, & p \neq q,\\ y_n, & p = q, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\{\delta_n = 0|\delta_{n-1} = 1\} = q^* = 1 - p^* = \begin{cases} \dfrac{aq+bp-r}{(b-a)(p-q)}, & p \neq q,\\ 1-y_n, & p = q. \end{cases}$$

Здесь $x_n, y_n \in [0,1]$, $p+q=1$.

Финансовое обязательство представляет собой линейную комбинацию европейских опционов call и put, т. е. $f_N(S_N) = \lambda(S_n - K_1)^+ + (1-\lambda)(K_2 - S_N)^+$, $1 \leqslant \lambda \leqslant 1$, K_1, K_2 — контрактные цены.

Рассматривается задача:

$$\max_{p\in[0,1]} \min_x X_0^\pi, \qquad X_N^\pi \geqslant f_N, \quad p \in [0,1]. \tag{2}$$

При фиксированном p оптимальное значение капитала портфеля с потреблением вычисляется по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} &Y_N = \frac{f_N}{B_N},\\ &Y_{n-1} = \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \begin{cases} p^*Y_n^{1,b} + q^*Y_n^{2,r}, & p \in [0, \min M(a,b,r) \cup \max M(a,b,r), 1],\\ \max\{Y_n^{1,b}, Y_n^{2,r}\}, & p = 1/2,\ r = (a+b)/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Поведение цены акции описывается полностью заполненным бинарным деревом, в котором атомы имеют белый цвет при $\delta_n = 1$ и черный цвет при $\delta_n = 0$. Дисконтированный капитал в момент времени n — $Y_n^{1,b}$, $Y_n^{2,r}$ (на белом и на черном атомах соответственно).

Максимум по p находился полным перебором в результате работы следующего алгоритма:

1) ввод параметров $a, b, r, N, \lambda, S_0, B_0, K_1, K_2$;

2) вычисление множества тех p, для которых рынок безарбитражен (по теореме);

3) разбиение этого множества на интервалы в соответствии с заданной погрешностью и вычисление верхней цены для каждого фиксированного значения p;

4) построение графика $g = g(p, C^*)$ и нахождение параметра p, при котором $C^*(= X_0^\pi)$ достигает наибольшего значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998.
2. *Данилова Н.В.* Хеджирование сверху, снизу и в среднеквадратическом для одной модели неполного рынка. Выпускная квалификационная работа./ Под научн. рук. Г. И. Белявского.