Н. А. Колодий (Волгоград, ВолГУ). **Измеримость по параметру двупараметрического стохастического интеграла по сильному мартингалу.**

Предположим, что $(\Theta, \mathcal{U})$ — произвольное измеримое пространство, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_z,\ z \in \mathbf{R}_+^2)$ — двупараметрическое семейство σ-алгебр, удовлетворяющее условиям: 1) если $x \leqslant z$, то $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}$; 2) $\mathcal{F}_0$ содержит все элементы $\mathcal{F}$ нулевой вероятности; 3) $\mathcal{F}_z = \cap_{x>z} \mathcal{F}_x$ для любого z; 4) для любых x и z σ-алгебры $\mathcal{F}_x$ и $\mathcal{F}_z$ условно независимы относительно $\mathcal{F}_{x \wedge z}$.

Обозначим $\mathbf{D}$ пространство таких функций g: $\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$, что: g непрерывна справа; для каждого $z \in \mathbf{R}_+^2$ существуют пределы $\lim_{x \to z,\, z_1 \leqslant x_1,\, x_2 < z_2} g(x)$ и $\lim_{x \to z,\, x_1 < z_1,\, z_2 \leqslant x_2} g(x)$; для каждого $z > 0$ существует $\lim_{z > x \to z} g(x)$. Определим $\|g\|_z = \sup_{x \in [0,z]} |g(x)|$ для $g \in \mathbf{D}$; $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ обозначают σ-алгебры $\mathbf{F}$-прогрессивно измеримых и $\mathbf{F}$-предсказуемых подмножеств $\mathbf{R}_+^2 \times \Omega$. Пусть $\mathcal{M}_S^2$ — пространство квадратично интегрируемых сильных $\mathbf{F}$-мартингалов [1].

Целью работы, представленной данным сообщением, является доказательство теоремы о существовании измеримой по параметру модификации стохастического интеграла $\int_{]0,x]} \beta(\theta, u) \mu(\theta, du)$ от предсказуемого поля $\beta(\theta, \cdot)$ по квадратично интегрируемому сильному мартингалу $\mu(\theta, \cdot)$. Некоторые результаты об измеримости по параметру стохастического интеграла, управляемого двупараметрическим сильным мартингалом, были анонсированы в [2].

Теорема 1. *Предположим, что выполнены следующие условия*: 1) $\mathcal{C}$ — *такая σ-алгебра подмножеств пространства* $\Theta \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega$, *что* $\mathcal{C} \subset \mathcal{U} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2) \otimes \mathcal{F}$ *и* $U \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega \in \mathcal{C}$ *для каждого* $U \in \mathcal{U}$; 2) $(\xi_n(\theta, z, \omega))_{n \in \mathbf{N}}$ — *такая последовательность* $\mathcal{C}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$-*измеримых функций, что* $\xi_n(\theta, \cdot, \omega) \in \mathbf{D}$ *для любых* $\theta \in \Theta$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$ *и* $\lim_{r,j \to \infty} \mathbf{P}\{\|\xi_r(\theta, \cdot) - \xi_j(\theta, \cdot)\|_z > \varepsilon\} = 0$ *для любых* $\varepsilon > 0$, $\theta \in \Theta$, $z \in \mathbf{R}_+^2$. *Тогда существует такая* $\mathcal{C}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$-*измеримая функция* $\xi(\theta, z, \omega)$, *что для каждого* $\theta \in \Theta$ *траектории случайного поля* $\xi(\theta, \cdot)$ *п. н. принадлежат* $\mathbf{D}$ *и* $\lim_{r \to \infty} \mathbf{P}\{\|\xi_r(\theta, \cdot) - \xi(\theta, \cdot)\|_z > \varepsilon\} = 0$ *для любых* $\varepsilon > 0$, $\theta \in \Theta$, $z \in \mathbf{R}_+^2$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}$ обозначает σ-алгебру таких подмножеств C пространства $\Theta \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega$, что $C \cap (\Theta \times [0,z] \times \Omega) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{B}([0,z]) \otimes \mathcal{F}_z$ для любого $z \in \mathbf{R}_+^2$.

Теорема 2. *Предположим, что* $(\theta, x, \omega) \to \mu(\theta, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$ *и* $\mu(\theta, \cdot) \in \mathcal{M}_S^2$ *для каждого* $\theta \in \Theta$. *Тогда существует такая* $\widetilde{\mathcal{T}}|\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$-*измеримая функция* $(\theta, x, \omega) \to \overline{\mu}(\theta, x, \omega)$, *что для каждого фиксированного* $\theta \in \Theta$ *траектории поля* $\overline{\mu}(\theta, \cdot)$ *п. н. принадлежат* $\mathbf{D}_0$ *и* $\overline{\mu}(\theta, \cdot)$ *является квадратической вариацией* [3] *мартингала* $\mu(\theta, \cdot)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия*: $(\theta, (x, \omega)) \to \beta(\theta, x, \omega) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{P}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $(\theta, x, \omega) \to \mu(\theta, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $\mu(\theta, \cdot) \in \mathcal{M}_S^2$, $\mathbf{E} \int_{]0,x]} \beta^2(\theta, u) \overline{\mu}(\theta, du) < \infty$ *для любых* $\theta \in \Theta, x \in \mathbf{R}_+^2$. *Тогда существует такая функция* $\Psi(\theta, x, \omega)$: $\Theta \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega \to \mathbf{R}$, *что*: 1) $(\theta, x, \omega) \to \Psi(\theta, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$; 2) $\Psi(\theta, x) = \int_{]0,x]} \beta(\theta, u) \mu(\theta, du)$ *п. н. для любых* $x \in \mathbf{R}_+^2$, $\theta \in \Theta$; 3) *для каждого фиксированного* $\theta \in \Theta$ *случайное поле* $\Psi(\theta, \cdot)$ *является элементом класса* $\mathcal{M}_S^2$, *и квадратическая вариация* $\Psi(\theta, \cdot)$ *на прямоугольнике* $]0, x]$ *равна* $\int_{]0,x]} \beta^2(\theta, u) \overline{\mu}(\theta, du)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гущин А. А.* К общей теории случайных полей на плоскости. — Успехи матем. наук., 1982, т. 372, № 6, с. 53–74.
2. *Колодий Н. А.* Интегралы по двупараметрическим сильным мартингальным ядрам и их применения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 1, с. 120–121.
3. *Гущин А. А., Мишура Ю. С.* Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов. — Теор. вер. и мат. стат., 1990, № 42,

c. 27–35.