

Т. И. Колодий (Волгоград, НИИГТП). **Стохастическая модель мгновенного точечного источника.**

Предположим, что в момент времени $t = 0$ в точке $x^* \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ произошел выброс вещества мощности $Q > 0$ в результате действия мгновенного точечного источника. Пусть $\xi(t, x)$ обозначает концентрацию примеси вещества в атмосфере в момент времени $t > 0$ в точке $x \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$. Считаем, что рассеивание примеси вещества происходит в случайном поле скоростей $\dot{\eta}$, определяемом случайным процессом $(\eta(t))_{t \geq 0}$ со стохастическим дифференциалом $d\eta(t) = (a_1(t)dt + \mu(t)dw_1(t), a_2(t)dt + \mu(t)dw_2(t), a_3(t)dt + \nu(t)dw_3(t))$, где w_1, w_2 и w_3 — независимые стандартные $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -винеровские процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$.

Введем обозначения:

$$\xi' = \nabla \xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi}{\partial x_2}, \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right), \quad \xi'' = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} \right).$$

В дальнейшем $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов.

Опираясь на общие идеи построения уравнений турбулентной диффузии, полагаем, что ξ является решением стохастического параболического уравнения Ито

$$\begin{aligned} d\xi(t, x) + \langle \xi'(t, x), d\eta(t) \rangle + g(t)\xi(t, x)dt &= \frac{1}{2} \langle \xi''(t, x), \varkappa(t) \rangle dt, \\ \xi(0, x) &= Q\delta(x - x^*), \end{aligned} \quad (1)$$

где δ — дельта-функция Дирака, непрерывная функция $g(t)$ определяет возможность изменения концентрации в результате химических превращений вещества, $\varkappa(t)$ — вектор коэффициентов турбулентной диффузии с координатами $\varkappa_1(t) = \varkappa_2(t) = \lambda(t)$, $\varkappa_3(t) = \sigma(t)$.

Решением уравнения (1) называем такое случайное поле ξ , что: 1) для любого $x \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ случайный процесс $(\xi(t, x))_{t \geq 0}$ согласован с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$; 2) для любых фиксированных $0 < s < t$ и $x \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ с вероятностью 1

$$\xi(t, x) - \xi(s, x) + \int_s^t \langle \xi'(u, x), d\eta(u) \rangle + \int_s^t g(u)\xi(u, x)du = \frac{1}{2} \int_s^t \langle \xi''(u, x), \varkappa(u) \rangle du;$$

3) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+} h(x)\xi(t, x)dx = Qh(x^*)$ п. н. для любой непрерывной ограниченной функции h .

Как правило, в случае моделирования рассеивания выброса стационарного источника полагают, что коэффициенты турбулентной диффузии зависят от пространственных переменных. В рассматриваемом случае моделирования рассеивания выброса мгновенного точечного источника наиболее естественным является предположение, что коэффициенты турбулентной диффузии зависят от средней длины $\rho(t)$ пути, пройденного центром облака вещества за время t .

В данной работе, в качестве одного из возможных вариантов, рассматривается зависимость $\mu(t)$, $\nu(t)$, $\lambda(t)$ и $\sigma(t)$ от $\rho(t)$, определяемая соотношениями

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda(s)ds &= \frac{\theta_1(t)\rho(t)}{\sqrt{1 + \theta_2(t)\rho(t)}}, & \int_0^t \sigma(s)ds &= \frac{\theta_3(t)\rho(t)}{\sqrt{1 + \theta_4(t)\rho(t)}}, \\ \int_0^t \mu^2(s)ds &= \theta_5(t) \int_0^t \lambda(s)ds, & \int_0^t \nu^2(s)ds &= \theta_6(t) \int_0^t \sigma(s)ds, \end{aligned}$$

где значения функций $\theta_1(t), \dots, \theta_6(t)$ для каждого момента времени $t > 0$ определяются стратификацией атмосферы, $\theta_1(t) > 0, \dots, \theta_4(t) > 0, 0 < \theta_5(t) < 1, 0 < \theta_6(t) < 1$.

В докладе излагаются методы статистического оценивания функций θ_j , $j = 1, \dots, 6$, по дискретным наблюдениям концентрации вещества в атмосфере, образованной в результате рассеивания выброса мгновенного точечного источника. Данная модель мгновенного точечного источника является частью стохастической модели «Источник–Концентрация–Доза–Канцерогенный риск» [1], описывающей отдаленные последствия острого воздействия канцерогенных веществ на организм человека.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра, Проект № 3476р.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колодий А. М., Колодий Т. И.* Стохастические модели канцерогенеза и канцерогенного риска. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 6, с. 1108–1110.