А. С. Андреев, **Е. И. Беликова**, **Р. Б. Зайнетдинов** (Ульяновск, УлГУ). **Метод функций Ляпунова в решении задач управления.**

Основополагающие результаты отечественных ученых в области теории устойчивости [1]–[4] явились основой широкого и эффективного применения функций Ляпунова в исследовании проблем стабилизации и управления движением, в математической теории конструирования систем управления [5]–[8].

В работе, представленной данным сообщением, изложены новые результаты по применению в задачах управления знакопостоянных функций Ляпунова.

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = X(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad X(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ есть фазовый вектор, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ есть управление, $X\colon \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ — непрерывная вектор-функция.

Исследуются следующие две задачи.

Задача I о стабилизации. Она состоит в определении управления с обратной связью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, при котором невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) является равномерно асимптотически устойчивым [9].

Задача II синтеза управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, переводящего точки некоторой области $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$ в точку $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ за конечное нефиксированное время [10].

Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ есть непрерывное управление, при котором для системы

$$\dot{\mathbf{x}} = X^0(t, \mathbf{x}), \quad X^0(t, \mathbf{x}) = X(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})) \tag{2}$$

можно построить предельные системы $\dot{\mathbf{x}} = X^*(t, \mathbf{x})$, определяющие ее предельные свойства [11].

Получены следующие решения задач I и II на основе знакоположительных функций Ляпунова, в которых обозначены: через h: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ — функция типа Хана [11]; для функции $V \in C^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+)$ через $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ — выражение

$$W = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i;$$

через $(X^*, W^*, V_\infty^{-1})$ — предельная совокупность [11].

Теорема 1. *Предположим, что можно найти такие функцию Ляпунова* $V = V(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$, $V(t, \mathbf{x}) \leqslant h(\|\mathbf{x}\|)$ *и управление* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$, *что*:

1) $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})) \leqslant 0$ *для любых* $(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}^+ \times (\mathbf{R}^n \setminus D)$;

2) $D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\colon W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = W(t, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0\} \subseteq \{V(t, \mathbf{x}) = 0\}$;

3) *для каждой предельной совокупности* $(X^*, W^*, V_\infty^{-1}(t, c))$ *множество* $\{V_\infty^{-1}(t, c)\colon c = c_0 > 0\} \cap \{W^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$ *не содержит движений предельной системы* $\dot{\mathbf{x}} = X^*(t, \mathbf{x})$;

4) *невозмущенное движение* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *асимптотически устойчиво относительно множества* $\{V_\infty^{-1}(t, c)\colon c = 0\}$ *равномерно по* $(X^*, W^*, V_\infty^{-1})$.

Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ *решает задачу* I.

Теорема 2. *Предположим, что можно найти такие функцию Ляпунова* $V = V(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$ *и управление* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, *что*:

1) *движения* (2) *из некоторой области* $\Gamma_0 \subset \mathbf{R}^n$ *равномерно ограничены областью* Γ_1;

2) $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})) \leqslant -h(V(t, \mathbf{x}))$, *при этом функция* $h = h(\mathbf{u})$ *интегрируема в точке* $\mathbf{u} = 0$;

3) *движения* (2), *начинающиеся на множестве* $\{V(t, \mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma_1\}$, *попадают в точку* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *за конечный отрезок времени.*

Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ *решает задачу* II.

Эти результаты развивают и обобщают результаты работ [9], [10], [12–14]. Их эффективность показана в решении ряда задач о моделировании управляемого движения твердого тела переменной массы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08–01–00741.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А. М.* Избранные труды. Работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007, 574 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962, 535 с.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 211 с.
4. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. — В сб.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. М.: Наука, 1968, с. 7–66.
5. *Красовский Н.Н.* Теория оптимальных управляемых систем. — В сб.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. М.: Наука, 1968, с. 179–244.
6. *Летов А. М.* Динамика полета и управления. М.: Наука, 1969, 359 с.
7. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1971, 395 с.
8. *Афанасьев В. Н.*, *Колмановский В. Б.*, *Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003, 615 с.
9. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. — В кн.: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. 2-е изд. испр. Доп. IV. М.: Наука, 1966, с. 475–514.
10. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости. — Матем. сб., 1979, т. 109 (151), № 4 (8), с. 582–606.
11. *Андреев А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы. — ПММ, 1984, т. 48, в. 2, с. 225–232.
12. *Кунцевич В. М.*, *Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977, 400 с.
13. *Андреев А. С.*, *Ким Е. Б.* Об оптимальной стабилизации установившегося движения управляемой системы. — Механика твердого тела. ИПМН НАН Украины (Донецк), 2004, т. 34, с. 119–126.
14. *Андреев А. С.*, *Румянцев В. В.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы. — Автомат. телемех., 2007, № 8, с. 18–31.