

**А. П. Сонин, А. К. Волосова, К. А. Волосов, Д. В. Юрченко** Москва, МГУПС; Санкт-Петербург, ПГУПС. **Решения уравнения Фоккера–Планка в задаче случайных колебаний полумаятника системы первого порядка.**

Излагается схема исследования семейства решений уравнения Фоккера–Планка для системы первого порядка находящейся под действием узкополосного случайного процесса [1]. На первом шаге исследуется точное решение стационарной задачи в простом случае классическим способом. Решение в этом случае выражается через элементарные и специальные функции в явной форме. На втором шаге исследования изучается стационарная задача в более сложном случае и ее решение строится в виде ряда. На третьем шаге, в нестационарном случае решение строится в параметрической форме. Известно, что параметрическая форма наиболее широкая и позволяет построить решение в том случае, когда построить его в явной форме нет возможности. Здесь используется метод не фиксированной, конструктивной замены переменных для уравнений в частных производных, основанный на новом свойстве этих уравнений [2–6] Диссертация всем доступна и выставлена на сайте. Таким образом, полученные формулы позволяют провести более подробный анализ важный как для теории, так и для целей обучения.

Движение системы первого порядка под действием узкополосного процесса является весьма распространенной моделью в задачах механики. Как правило задача считается решенной если известна плотность распределения вероятности (ПРВ) перемещенной системы. Для того, чтобы найти ПРВ необходимо построить решение уравнения в частных производных — уравнения Фоккера–Планка. В связи с тем, что это уравнение, в общем случае, может быть многомерным, нелинейным и вырожденным уравнением параболического типа, найти его аналитическое решение оказывается сложной задачей, даже для систем подверженных действию гауссова белого шума. Существует ограниченное число систем для которых решение уравнения Фоккера–Планка строится в явном виде [1]. С другой стороны, насколько известно авторам, работ в которых исследуются аналитические решения уравнения Фоккера–Планка для системы находящихся под действием узкополосного возмущения просто не существует. Следовательно, весьма актуальной является задача построения аналитических решений уравнения Фоккера–Планка для систем подверженных действию узкополосного шума.

Рассмотрим уравнение движения системы первого порядка, подверженной действию узкополосного шума, имеет вид

$$x' + \alpha x = \lambda \cos(y(t)), \quad y' = \omega + \xi. \quad (1)$$

Здесь  $\xi$  — гауссовский белый шум. Этим уравнениям соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка

$$p'_t - \alpha(x p)'_x + \lambda \cos(y) p'_x + \omega p'_y - \varepsilon p_{yy}'' = 0, \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$ -аналог коэффициента трения,  $\varepsilon = d/2 < 1$  коэффициент диффузии в безразмерном виде,  $\lambda, \omega$ -заданные константы. Рассмотрим два случая задачи,  $\alpha = 0$  и  $\alpha \neq 0$ . Точное решение уравнения (2) в стационарном случае ( $p'_t = 0$ ),  $\alpha = 0$  имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} \exp\left(x + \frac{y\omega}{2\varepsilon}\right) [c_1 \text{Mathieu}C(4a, 4q, y/2) + c_2 \text{Mathieu}S(4a, 4q, y/2)], \\ y \in (2\pi + \text{Arccos}(\frac{-\omega^2}{2\varepsilon\lambda}))[-1, 1], \\ 0, y \notin (2\pi + \text{Arccos}(\frac{-\omega^2}{2\varepsilon\lambda}))[-1, 1]. \end{cases}$$

Здесь функции  $\text{Mathieu}C(4a, 4q, y/2)$ ,  $\text{Mathieu}S(4a, 4q, y/2)$  функции Матье, (В некоторых книгах они обозначаются через  $ce(y, q)$ ,  $se(y, q)$ .) где  $a = -\frac{\omega^2}{4\varepsilon^2}$ ,  $q = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$ . В

данном случае уравнение Матье имеет вид

$$Q''(y) + (a - 2q \cos(y))Q(y) = 0. \quad (3)$$

Можно выбрать четную часть решения уравнения Матье и положить равным нулю константу  $c_2$ . Однако, построенное решение не обладает свойством симметрии, так как и исходное уравнение (2) не является инвариантным относительно замены  $y$  и  $-y$ . Константа  $c_1$  определяется из условия нормировки. Для этого надо сшить построенное решение с «нулем». В линейном уравнении (2) это можно сделать только в первой (в отсчете от точки  $y = 0$ ) точке перегиба. К счастью, такая точка перегиба в построенном решении имеется, см.(3). Остальные параметры должны быть такими, чтобы в этой точке было верно соотношение

$\text{Mathieu}C(4a, 4q, (\pm \text{Arccos}(\frac{-\omega^2}{2\varepsilon\lambda}))/2) = 0$ . Тогда можно посчитать дисперсию, следуя методу моментов [1].

На втором шаге рассмотрим стационарный случай при  $\alpha \neq 0$ . Точное решение уравнения (2) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} C_2 \exp(c_o x + y\omega/(2\varepsilon))v(x, y), \\ y \in (2\pi + \text{Arccos}(\frac{4\alpha\varepsilon + 4c_o x \alpha \varepsilon - \omega^2}{4c_o \varepsilon \lambda}))[-1, 1], \\ 0, y \notin (2\pi + \text{Arccos}(\frac{4\alpha\varepsilon + 4c_o x \alpha \varepsilon - \omega^2}{4c_o \varepsilon \lambda}))[-1, 1]. \end{cases}$$

Где функция  $v(x, y)$  является решением уравнения

$$(4\alpha\varepsilon + 4c_o x \alpha \varepsilon - \omega^2 - 4c_o \varepsilon \lambda \cos(y))v(x, y) + 4\varepsilon^2 v_{yy}'' + 4\varepsilon(x\alpha - \lambda \cos(y))v_x' = 0, \quad (4)$$

Решение уравнения (4) ищем в виде ряда

$$v(x, y) = a_{oo}(x) \cos(y) + a_o(x) \cos(2y) + a_1(x) \cos(3y) + \dots \quad (5)$$

Подставляем этот ряд в уравнение, и представляя тригонометрические функции с помощью формул Эйлера в экспоненциальной форме, сгруппируем коэффициенты разделяя переменные  $x$  и  $y$ .

Приравнявая к нулю коэффициенты зависящие только от переменной  $x$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдем последовательно коэффициенты:

$$a_{oo}(x) = C_{ao} \exp(-c_o x), \quad a_o(x) = \exp(-c_o x) [C_a + \frac{C_{ao} x}{4\varepsilon \lambda c_o} (8\alpha \varepsilon c_o - 4\varepsilon^2 - \omega^2)].$$

Аналогично, вычисляются и другие коэффициенты, которые мы не приводим в связи с громоздкостью. Здесь  $c_o$ ,  $C_{ao}$ ,  $C_a$ -константы. Построенное решение шпигуем с нулем, аналогично вышеизложенному, в точке перегиба, координата которой определяется из уравнения (4). В нестационарном, самом сложном случае громоздкие формулы точного решения в параметрической форме будут приведены в докладе.

Авторы выражают благодарность академику В. П. Маслову, д.ф.-м.н. М. В. Карасеву, д.ф.-м.н. С. Ю. Доброхотову, д.ф.-м.н. В. Г. Данилову за полезные советы и обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юрченко Д. В. Оптимальное управление и математическое моделирование в стохастических задачах механики. — Диссертация на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук, МИИТ.
2. Волосов К. А. Метод построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме. — Материалы научной конференции Герценовские чтения. Санкт-Петербург, Изд-во Санкт-Петербургского педагогического ун-та, 2006, с. 35–40.

- 
3. *Волосов К. А.* Construction of solutions of quasilinear parabolic equations in parametric form. — Дифф. уравн. 2007, т. 43, в. 4, с. 492–497, Differential Equations, 2007, v. 43, № 4, p. 507–512.
  4. *Волосов К. А.* Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами. — Диссертация на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук, 2007, МИЭМ. <http://eqworld.ipmnet.ru>, в разделе диссертаций.
  5. *Волосов К. А.* Формулы для точных решений квазилинейных уравнений с частными производными в неявной форме. — Доклады АН, 2008, т. 77, № 1, с. 1–4. Doklady Akademii Nauk, 2008, v. 418, № 1, p. 11–14.
  6. *Волосов К. А.* Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными. — Сибирский журнал индустриальной математики 2008, т. 11, № 2(34), с. 29–39. English transl. J. Appl. Ind. Math.