

О. В. Назарько (Ростов-на-Дону, РГСУ). **О существовании и единственности эквивалентных мартингалльных деформаций для бинарного (B, S) -рынка на деформированном стохастическом базисе.**

Пусть $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathbf{P}, (Q^{(n)})_{n=0}^N)$ — деформированный стохастический базис с конечным горизонтом N (см. [1]), где фильтрация $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ порождена бинарным деревом, т.е. $\mathcal{F}_0 = (\Omega, \emptyset)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(A_n^1, A_n^2, \dots, A_n^{2^n})$ ($n = 0, 1, \dots, N$), причем при переходе от момента n к моменту $n+1$ каждый атом A_n^k ($A_0^0 := \Omega$) σ -алгебры $\mathcal{F}_n$ дробится на два атома A_{n+1}^{2k-1} и A_{n+1}^{2k} σ -алгебры $\mathcal{F}_{n+1}$ ((n, k) -ветвление исходного бинарного дерева). Пусть вероятностная мера $\mathbf{P}$ нагружает все атомы σ -алгебры $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$, а меры $Q^{(n)}$ нагружают все атомы σ -алгебры $\mathcal{F}_n$ ($n = 0, 1, \dots, N$). В дальнейшем нам понадобятся плотности $h_n = dQ^{(n+1)}/dQ^{(n)}$, где $Q^{(n+1)}$ есть ограничение вероятностной меры $Q^{(n+1)}$ на σ -алгебру $\mathcal{F}_n$. Представим $\mathcal{F}_n$ -измеримую случайную величину h_n следующим образом: $h_n = \sum_{k=1}^{2^n} h_n^k I_{A_n^k}$. Рассмотрим последовательность случайных величин $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$, каждую из которых будем мыслить как дисконтированную стоимость акции некоторого (B, S) -рынка в соответствующий момент времени. Таким образом, $Z_0 = z_0^0 = \text{const}$ и $Z_n = \sum_{k=1}^{2^n} z_n^k I_{A_n^k}$ ($n = 1, \dots, N$).

Для каждого (n, k) -ветвления рассмотрим систему уравнений

$$z_{n+1}^{2k-1}x + z_{n+1}^{2k}y = z_n^k, \quad x + y = 1. \quad (1)$$

Случай 1. Предположим, что (B, S) -рынок с дисконтированной стоимостью акции $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ безарбитражен и полон. Тогда для любых $n = 0, 1, \dots, N-1$ и $k = 1, 2, \dots, 2^n$ система уравнений (1) имеет единственное строго положительное решение, которое мы обозначим $(p_{n+1}^{2k-1}, p_{n+1}^{2k})$.

Теорема. Исходный (B, S) -рынок допускает единственную мартингалльную деформацию $(R^{(n)})_{n=0}^N$, эквивалентную исходной деформации $(Q^{(n)})_{n=0}^N$ (в смысле [1]), тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия связи между плотностями h_n и параметрами рынка:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \prod_{j=0}^{n-1} h_{n-j}^{[(k+2^j-1)/2^j]} p_{n-j}^{[(k+2^j-1)/2^j]} = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2)$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа. При этом деформация $(R^{(n)})_{n=0}^N$ рассчитывается по рекуррентным формулам

$$r_{n+1}^{2k-1} = p_{n+1}^{2k-1} h_n^k r_n^k, \quad r_{n+1}^{2k} = p_{n+1}^{2k} h_n^k r_n^k, \quad \text{где } r_n^k := Q^{(n)}(A_n^k). \quad (3)$$

Отметим, что если $h_n^k = 1$ для любых $n = 1, 2, \dots, N-1$ и $k = 1, 2, \dots, 2^n$, то соотношения (2) выполняются автоматически, а равенствами (3) задается единственная мартингалльная мера исходного (B, S) -рынка.

Пример. Пусть исходный (B, S) -рынок является рынком Кокса–Росса–Рубинштейна (см. [2]) с параметрами a , b и r , где $-1 < a < r < b$. Предположим, что для каждого (n, k) -ветвления событие A_{n+1}^{2k-1} означает повышение дисконтированной стоимости акции, а событие A_{n+1}^{2k} означает ее понижение. Тогда $p_{n+1}^{2k-1} = (r-a)/(b-a)$, $p_{n+1}^{2k} = (b-r)/(b-a)$. При этом соотношение (2) редуцируется в соотношение

$$\sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^{\alpha(n,k)} \left(\frac{b-r}{b-a} \right)^{n-\alpha(n,k)} \prod_{j=0}^{n-1} h_{n-j}^{[(k+2^j-1)/2^j]} = 1,$$

где

$$\alpha(n, k) = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{[(k+2^j-1)/2^j]} \right),$$

а деформация $(R^{(n)})_{n=0}^N$ рассчитывается по формулам

$$r_{n+1}^{2k-1} = \frac{r-a}{b-a} h_n^k r_n^k, \quad r_{n+1}^{2k} = \frac{b-r}{b-a} h_n^k r_n^k.$$

Случай 2. Предположим, что исходный рынок безарбитражен, но неполон. Здесь могут возникнуть различные ситуации, которые мы продемонстрируем на двухшаговой модели.

Если $z_0^0 = z_1^1 = z_1^2$, z_1^1 лежит строго между z_2^1 и z_2^2 , z_1^2 лежит строго между z_2^3 и z_2^4 , а $h_1 \neq 1$, то при $n = 1$ совокупность условий (2) и (3) равносильна системе

$$z_1^1 p_1^1 + z_1^2 p_1^2 = z_0^0, \quad h_1^1 p_1^1 + h_1^2 p_1^2 = 1,$$

которая, очевидно, имеет единственное строго положительное решение. Таким образом, существует единственная мартингальная деформация, эквивалентная исходной деформации.

Если z_0^0 лежит строго между z_1^1 и z_1^2 , $z_1^1 = z_2^1 = z_2^2$ и z_1^2 лежит строго между z_2^3 и z_2^4 , то при выполнении соотношения $h_1^1 p_1^1 + h_1^2 p_1^2 = 1$ будет существовать бесконечное множество мартингальных деформаций, эквивалентных исходной.

Остальные возможности рассматриваются аналогично.

Случай 3. Если исходный рынок арбитражен, то не существует мартингальной деформации, эквивалентной исходной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назарько О. В. О (B, S) -рынках на деформированных стохастических базисах. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 6, с. 1038–1039.
2. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. I. Дискретное время. — Теория вероятн. и ее применен., 1994, т. 39, в. 1, с. 23–79.