В. Л. К р е п с (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **О теоретико-игровой характеризации стохастической независимости.**

В конечных бескоалиционных играх игроки одновременно и без обмена информации выбирают свои действия (чистые стратегии) из заданных конечных множеств. Традиционно, если игроки рандомизируют свой выбор, то выигрыши игроков определяются как математическое ожидание выигрышей в чистых стратегиях по мере, равной произведению независимых мер — смешанных стратегий игроков (вероятностных распределений на множествах чистых стратегий игроков). Таким образом, смешанные стратегии игроков предполагаются стохастически независимыми. Ситуация (набор смешанных стратегий) называется равновесной по Нэшу [1], если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, отклонившись от выбранной стратегии. Теорема Нэша [1] устанавливает, что любая конечная бескоалиционная игра имеет ситуацию равновесия в традиционном смешанном расширении.

Предположение о стохастической независимости рандомизированных выборов игроков базируется прежде всего на физической независимости выборов. В книге М. Каца [2] отмечается, что, вообще говоря, стохастическая независимость испытаний не вытекает из их физической независимости. Аналогичное рассуждение см. в статье Н. Н. Воробьева.

Рассмотрим пример, в котором два игрока используют для реализации выбранных ими смешанных стратегий один и тот же датчик случайных чисел. У каждого игрока имеется два возможных действия: a и b — действия игрока 1, c и d — действия игрока 2. Игроки выбирают свои действия в соответствии со смешанными стратегиями (x_a, x_b), $x_b = 1 - x_a$, и (y_c, y_d), $y_d = 1 - y_c$. Датчик выдает случайное число z, равномерно распределенное на отрезке $[0, 1]$. Игрок 1 выбирает действие a, если $z < x_a$. Игрок 2 выбирает действие c, если $z < y_c$. Тогда при условии $x_a \leqslant y_c$ вероятность $\Pr(a \cap c) = x_a$, вероятность $\Pr(a \cap d) = 0$, вероятность $\Pr(b \cap c) = y_c - x_a$ и вероятность $\Pr(b \cap d) = y_d$.

Приведенное совместное распределение соответствует заданному порядку стратегий. Следующее совместное распределение получается усреднением по всем возможным порядкам. Если $x_a \leqslant \min(y_c, y_d)$, то вероятность $\Pr(a \cap c) = x_a/2$, вероятность $\Pr(a \cap d) = x_a/2$, вероятность $\Pr(b \cap c) = y_c - x_a/2$ и вероятность $\Pr(b \cap d) = y_d - x_a/2$. Если $y_d \leqslant \min(x_a, x_b)$, то вероятность $\Pr(a \cap c) = x_a - y_d/2$, вероятность $\Pr(a \cap d) = y_d/2$, вероятность $\Pr(b \cap c) = x_b - y_d/2$ и вероятность $\Pr(b \cap d) = y_d/2$.

Отказываясь от предположения о стохастической независимости выборов игроков, мы вводим понятие типа зависимости — отображения, которое каждой ситуации в смешанных стратегиях сопоставляет вероятностное распределение на множестве ситуаций в чистых стратегиях. Естественно предполагается, что маргинальные распределения совпадают со смешанными стратегиями игроков. Выигрыши игроков в ситуации в смешанных стратегиях полагаем равными математическому ожиданию выигрышей в чистых стратегиях по мере на множестве ситуаций в чистых стратегиях, которую предписывает тип зависимости данной ситуации в смешанных стратегиях.

В настоящей работе доказывается, что стохастическая независимость — единственный тип зависимости, при котором любая конечная бескоалиционная игра N лиц имеет ситуацию равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Для случая двух игроков этот результат был установлен в работе автора [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нэш Дж.* Бескоалиционные игры. — В сб.: Матричные игры. Физматгиз, 1961, с. 205–221.
2. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М: ИЛ, 1963.

3. *Воробьев Н. Н.* Аналитическая характеризация независимости и марковости. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. VI, в. 4.
4. *Kreps V.* On games with stochastically dependent strategies, IJGT, 1994, v. 23, p. 57–64