

В. А. Лебедев (Москва, МГУ). **Проекции измеримых случайных процессов и условные математические ожидания.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ есть стохастический базис, состоящий из полного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и фильтрации $\mathfrak{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, удовлетворяющей обычным условиям. Для данного стохастического базиса естественным образом определяются предсказуемая σ -алгебра $\mathcal{P}$ и опциональная σ -алгебра $\mathcal{O}$ на $\Omega \times \mathbf{R}_+$. Представляют интерес также σ -алгебры, промежуточные между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{O}$, например, достижимая σ -алгебра $\mathcal{A}$.

В § 1.2 диссертации [1] дается унифицированное изложение основ теории проекций измеримых случайных процессов на такие σ -алгебры, порождаемые предсказуемой σ -алгеброй $\mathcal{P}$ и некоторым множеством стохастических интервалов, и дуальных проекций случайных мер на σ -алгебры. Здесь основополагающую роль играет теорема 1.2.1, согласно которой для любого ограниченного снизу измеримого случайного процесса X и σ -алгебры $\mathcal{R}$ на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, порождаемой $\mathcal{P}$ и стохастическими интервалами вида $\llbracket T, \infty \rrbracket$ для некоторого семейства марковских моментов T , существует такой единственный с точностью до $\mathbf{P}$ -неотличимости $\mathcal{R}$ -измеримый процесс T , что

$$\mathbf{E} X_T 1_{\{T < \infty\}} = \mathbf{E}^r X_T 1_{\{T < \infty\}}$$

для всякого $\mathcal{R}$ -хорошего марковского момента T (т. е. такого, что $\llbracket T, \infty \rrbracket \in \mathcal{R}$), называемый *проекцией процесса X на σ -алгебру $\mathcal{R}$* .

В [1] приведен также контрпример, показывающий, что не всякая σ -алгебра на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, промежуточная между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{O}$, может быть порождена стохастическими интервалами, в связи с этим высказывались пожелания распространить понятие проекции и на такие σ -алгебры. С этой целью, прежде всего, для произвольной σ -алгебры $\mathcal{R}$ на $\omega \times \mathbf{R}_+$, промежуточной между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{O}$, определим $\mathcal{R}_{cl}$ как σ -алгебру на $\Omega \times \mathbf{R}_+$, порождаемую $\mathcal{R}$ -измеримыми cadlag процессами или, что эквивалентно, стохастическими интервалами вида $\llbracket T, \infty \rrbracket$ для $\mathcal{R}$ -хороших марковских моментов T . Если теперь определить проекцию процесса X на σ -алгебру $\mathcal{R}$ как $\mathcal{R}$ -измеримый процесс ${}^r X$, удовлетворяющий равенству (1) для всякого $\mathcal{R}$ -хорошего марковского момента T , то такой процесс не будет единственным, но всегда существует и единственна с точностью до $\mathbf{P}$ -неотличимости $\mathcal{R}_{cl}$ -измеримая версия такой проекции.

Возможен и другой подход к определению проекции, эквивалентный вышеприведенному. Пусть A — $\mathcal{R}$ -измеримый возрастающий процесс с $\mathbf{P}$ -п. н. $A_0 \geq 0$ и $\mathbf{E} A_\infty = 1$. Тогда его мера Долеан $M_A^{\mathbf{P}}$ на $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+))$ является вероятностной мерой, по которой процесс X допускает условное математическое ожидание относительно σ -алгебры $\mathcal{R}$, и проекция, определенная выше, является общей версией этого условного математического ожидания для всех $\mathcal{R}$ -измеримых возрастающих процессов A . Эта проекция, как мы видели, всегда существует, может быть выбрана $\mathcal{R}_{cl}$ -измеримой, и в классе $\mathcal{R}_{cl}$ -измеримых процессов единственна с точностью до $\mathbf{P}$ -неотличимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев В. А. L^p -значные случайные меры и стохастические уравнения. Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: МИ РАН, 2006.