

М. С. Тихов, Д. С. Криштопенко (Нижний Новгород, ННГУ).
Тестирование монотонных функций эффективности по неполным выборкам в случае не прямых наблюдений.

Пусть $\{(X_i, Y_i, U_i), 1 \leq i \leq n\}$ — стационарная последовательность независимых троек случайных величин с совместной функцией распределения $F(x)G(y, u)$ и плотностью $f(x)g(y, u)$ на $\mathbf{R}^3$. Мы наблюдаем выборку $\mathcal{Y}^{(n)} = \{(W_i, Y_i), 1 \leq i \leq n\}$ (непрямые наблюдения), где $W_i = I\{X_i < U_i\}$ — индикатор события $\{X_i < U_i\}$. Требуется сделать выводы относительно вида функции эффективности $m(x) = \mathbf{E}(W|Y = x)$ по выборке $\mathcal{Y}^{(n)}$, а именно, проверить, является ли функция $m(x)$ монотонной? Мы используем идеи работы [1], хотя там рассмотрена иная исходная модель. Наряду с классическими оценками Надарая–Ватсона, мы исследуем также kNN -оценки, что приводит к исключению плотности в знаменателе в предельной дисперсии исследуемых статистик.

Для оценки $m(x)$ по выборке $\mathcal{Y}^{(n)}$ мы используем отношения

$$\tilde{m}_n(x) = \sum_{i=1}^N W_i K_r\left(\frac{x - Y_i}{h_r}\right) / \sum_{i=1}^N K_r\left(\frac{x - Y_i}{h_r}\right),$$

где $K_r(x) \geq 0$ — ядерная функция (ядро). В качестве ширины окна просмотра мы рассматривали: 1) $h_r = h_r(n)$ — неслучайную последовательность, сходящуюся к нулю при $n \rightarrow \infty$; 2) h_r — случайную последовательность, определяемую k ближайшими соседями.

Определим

$$M_n^{-1}(m, t) = \frac{1}{nh_r} \int_0^1 \int_{-\infty}^t K_d\left(\frac{m(x) - u}{h_d}\right) du dx, \quad \hat{m}_n^{-1}(t) = M_n^{-1}(\tilde{m}_n, t),$$

если функция $m = m(x)$ — строго возрастающая. Предполагается, что $F(x)$ имеет компактный носитель на отрезке $[0, 1]$; $K_d(x)$, h_d — ядро и ширина окна просмотра, отличные от $K_r(x)$, h_r .

Пусть $T_n = \int_0^1 (\hat{m}_n^{-1}(\tilde{m}_n(x)) - x)^2 dx$. Показано, что

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} T = \int_0^1 \left(\int_0^1 I\{m(v) \leq m(x)\} dv - x \right)^2 dx.$$

Основой проверки гипотезы о строгой монотонности является следующий результат.

Теорема. Пусть $m(x)$ — непрерывная функция. Величина T равна нулю тогда и только тогда, когда функция эффективности строго возрастает на интервале $[0, 1]$.

Установлено, что статистика T_n асимптотически нормальна. Это дает возможность построить критерий для проверки гипотезы о строгой монотонности функции эффективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birke M., Dette H. Testing Strict Monotonicity in Nonparametric Regression. — Math. Meth. Statist., 2007, v. 16, № 2, p. 110–123.