

А. В. Т р е г у б (Москва, МГУИ). Развитие трещины в упругой конструкции.

Рассмотрим трещину, развивающуюся в плоском упругом теле с постоянной скоростью V . Пусть координатные оси X и Y фиксированной декартовой системы координат лежат в плоскости тела, а уравнение $Y = 0$ определяет линию развивающейся трещины. Введем подвижную координатную систему x, y , которая остается фиксированной относительно движущейся вершины трещины. В результате можно записать $x = X - Vt$. Переходя к комплексным переменным, краевую задачу теории упругости можно свести к задаче о нахождении комплексных потенциалов $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$, через которые выражаются напряжения и перемещения в вершине трещины [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\operatorname{Re}\left[\left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2\right)\Phi'(z_1) + 2\Psi'(z_2)\right], \\ \sigma_y &= \operatorname{Re}\left[\left(1 + \beta_2^2\right)\Phi'(z_1) + 2\Psi'(z_2)\right], \\ u_x &= -\operatorname{Re}[\Phi(z_1) + \Psi(z_2)], \quad u_y = \operatorname{Im}\left[\beta_1\Phi(z_1) + \frac{1}{\beta_2}\Psi(z_2)\right],\end{aligned}$$

где $z_j = x + i\beta_j y = r_j e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2$; $\beta_1^2 = 1 - V^2/C_d^2$, $\beta_2^2 = 1 - V^2/C_s^2$, а C_d и C_s — скорости волн растяжения и сдвига.

Скорости волн определяются упругими постоянными материала и могут быть выражены через модуль сдвига μ , коэффициент Пуассона ν и плотность материала ρ следующим образом:

$$C_d^2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\mu}{\rho}, \quad C_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, & \text{для плоского напряженного состояния,} \\ 3 - 4\nu, & \text{в случае плоской деформации.} \end{cases}$$

Общие решения, определяющие поля напряжений и перемещений вблизи вершины трещины, можно записать в виде

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n1} r_1^{n/2-1} + B_{n1} r_2^{n/2-1}, \quad \sigma_y = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n2} r_1^{n/2-1} + B_{n2} r_2^{n/2-1}, \quad (1)$$

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n1} r_1^{n/2} + B_{n1} r_2^{n/2}, \quad u_y = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n2} r_1^{n/2} + B_{n2} r_2^{n/2-1}. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты A_{nj} , B_{nj} ($j = 1, \dots, 4$) зависят от n , β_1 , β_2 , K_{In} , $K_{II n}$, θ , где K_{In} , $K_{II n}$ — неопределенные параметры, связанные с типами разрушения I и II. Подробный вид полей напряжений и перемещений можно найти в работе [1].

С целью моделирования развития трещины в твердом теле можно воспользоваться двумя различными концепциями численного моделирования, в первой используется стационарная сетка конечных элементов, во второй — подвижная. В рамках каждой концепции имеется несколько альтернативных схем.

Ключевыми параметрами в механике разрушения являются коэффициенты интенсивности напряжений. Для конкретных конструкций и условий нагружения указанные коэффициенты могут быть вычислены либо непосредственно, используя формулы (1), (2), экстраполируя решение в $r = 0$, либо с помощью энергетических методов, например, применяя J -интеграл.

Согласно методу декомпозиции [1] будем иметь

$$K_M = \sqrt{\frac{2\mu}{A_M(V)}} J_M, \quad M = \text{I, II},$$

где

$$A_I(V) = \frac{\beta_1(1 - \beta_2^2)}{D(V)}, \quad A_{II}(V) = \frac{\beta_2(1 - \beta_2^2)}{D(V)}, \quad D(V) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2,$$

J_M — не зависящие от пути интегрирования интегралы по замкнутому контуру вокруг вершины трещины (вычисляются непосредственно для конкретного случая).

Таким образом, используя алгоритм, описанный выше, можно исследовать процесс развития трещины в упругих конструкциях.

Предложенный метод работает и в случае развития трещины при комбинированном типе раскрытия. Определенный интерес представляют задачи, где трещина развивается в вязко-упругом теле [2]. Указанный алгоритм можно обобщить и для вязко-упругого материала конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вычислительные методы в механике разрушения. /Под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990, 392 с.
2. *Трегуб А. В.* Исследование развития трещины смешанного типа в вязкоупругом теле. — В сб.: Материалы молодежной научно-технической конференции: Космонавтика—XXI век. Москва—Калининград (Московской обл.), 1–7 сентября 1991 г., с. 17.