

Д. В. У ч а й к и н (Ульяновск, УлГУ). **О численном решении уравнения с дробной производной методом Монте–Карло.**

В настоящее время известно много физических процессов, описание которых удобно проводить на основе уравнений, содержащих производные дробного порядка. К их числу относится, в частности, недебаевская релаксация в диэлектриках, многочисленные примеры которой собраны в книге [1]. В работе [2] уравнение с дробной производной использовалось для описания эффекта памяти, возникающего в диэлектриках, подчиняющихся степенному закону релаксации Кюри–фон Швайдлера. В наших работах [3], [4] выведено и решено дробно-дифференциальное уравнение для более реалистического случая — контура, содержащего, наряду с емкостью, обычное сопротивление и источник ЭДС $E(t)$: $-\infty D_t^\alpha f_\alpha(t) + \tau^{-\alpha} f_\alpha(t) = E(t)$, $0 < \alpha < 1$. Его решение $f_\alpha(t)$ с начальным условием $f_\alpha(-\infty) = 0$ выражается через функцию Грина $G_\alpha(t)$: $f_\alpha(t) = \int_{-\infty}^t G_\alpha(t-t')E(t')dt'$, связанную с двухпараметрической функцией Миттаг–Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ соотношением $G_\alpha(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(t/\tau)^\alpha)$, где $E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j / \Gamma(\alpha j + \alpha)$.

В случае, когда заряжающая конденсатор ЭДС $E(t)$ имеет форму прямоугольного импульса амплитудой E_0 на отрезке $[-\theta, 0]$, процесс разрядки (релаксация) выражается через однопараметрическую функцию Миттаг–Леффлера $E_\alpha(z)$:

$$\frac{f_\alpha(t)}{f_\alpha(0)} = \frac{E_\alpha(-t^\alpha/\tau^\alpha) - E_\alpha[-(t+\theta)^\alpha/\tau^\alpha]}{1 - E_\alpha(-\theta^\alpha/\tau^\alpha)}, \quad E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}. \quad (1)$$

Использование этого представления в численных расчетах оказывается не очень эффективным: с увеличением аргумента t возрастает шум, обусловленный ограниченным числом значащих цифр (из-за специфики вычисления гамма-функции и разностей близких значений степенных функций с высокими показателями, см. аналогичные замечания в работе [5]).

В связи с этим нами использована вторая форма представления решения, связанная с односторонними устойчивыми плотностями распределения вероятностей Леви. Вторая форма связана с односторонними устойчивыми плотностями распределения вероятностей Леви $g_+(t; \alpha)$, определенными через преобразование Лапласа: $g_+(t; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t - \lambda^\alpha} d\lambda$. Обратное преобразование Лапласа для образа функции Грина

$$\hat{G}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha + \tau^{-\alpha}} \equiv \int_0^\infty e^{-[\lambda^\alpha + \tau^{-\alpha}]x} dx$$

приводит к представлению

$$G_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d\lambda e^{\lambda t} \int_0^\infty e^{-[\lambda^\alpha + \tau^{-\alpha}]x} dx = \alpha t^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-t^\alpha/(\tau z)^\alpha} g_+(z; \alpha) z^{-\alpha} dz.$$

Таким образом, $f_\alpha(t) = \int_0^\infty dz g_+(z; \alpha) h(t; z, \alpha)$, где $h(t; z, \alpha) = z^{-\alpha} \int_0^\infty dy e^{-y/z^\alpha} E(t-y^{1/\alpha})$, и здесь функцию $f_\alpha(t)$ можно рассматривать как математическое ожидание функции $h(t; S(\alpha), \alpha)$ случайной переменной $S(\alpha)$. Согласно закону больших чисел, $f_\alpha(t) \approx N^{-1} \sum_{j=1}^N h(t; S_j(\alpha), \alpha)$. Независимые случайные величины $S_j = S_j(\alpha)$ разыгрываются по формуле

$$S(\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi U_1) [\sin((1-\alpha)\pi U_1)]^{1/\alpha-1}}{[\sin(\pi U_1)]^{1/\alpha} |\ln U_2|^{1/\alpha-1}},$$

где U_1 и U_2 — независимые случайные переменные, равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$ (см. [6]).

В случае прямоугольного импульса ЭДС мы получаем

$$f_{\alpha}(t) \approx \frac{E_0 \tau^{\alpha}}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ \exp \left[- \left(\frac{t}{\tau S_j} \right)^{\alpha} \right] - \left[- \left(\frac{t + \theta}{\tau S_j} \right)^{\alpha} \right] \right\}. \quad (2)$$

Сравнение методов показывает, что метод Монте–Карло (2) позволяет получить хорошие результаты на всем рассматриваемом отрезке времени (от $t = 0$ до $t = 100$, когда решение достигает асимптотики), а представление (1) пригодно только для ограниченного интервала, медленно возрастающего с увеличением числа значащих цифр.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07–01–00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jonscher A. K.* Universal Relaxation Law. London: Chelsea Dielectric Press, 1996.
2. *Westerlund S.* Dead nature has memory! — *Physica Scripta*, 1991, v. 43, p. 174.
3. *Учайкин В. В., Учайкин Д. В.* Эффект памяти в диэлектриках. — Уч. записки Ульяновского госуниверситета. Сер. физ., 2005, 1 (17), с. 14.
4. *Uchaikin V. V., Uchaikin D. V.* Chaos, Complexity and Transport. Singapore: World Scientific, 2007, p. 337.
5. *Loverro A.* Fractional Calculus: History, Definitions and Application for the Engineer (http://en.wikipedia.org/wiki/fractional_calculus).
6. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and Stability: Stable Distributions and Their Applications. Utrecht: VSP, 1999.