Д. И. Т а р а р у х и н (Москва, МГУ). **Мера Эрдёша на компакте целых 2-адических чисел.**

Рассмотрим случайный ряд

$$\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\cdot 2^k,\quad \text{где}\quad \xi_k \text{ — н.о.р.},\quad \xi_k\in\mathbf{Z},\quad \xi_k\geqslant 0,\quad \mathbf{E}\xi_k<\infty$$

на пространстве целых 2-адических чисел

$$X=\biggl\{\mathbf{x}=\sum_{k=0}^{\infty}x_k\cdot 2^k\biggm| x_k=0 \text{ или } 1\biggr\}.$$

Пространство X — компактная абелева группа с топологией, заданной базой *цилиндрических множеств* вида $[a_0,\dots,a_k]=\{\mathbf{x}\mid x_0=a_0,\dots,x_k=a_k\}$. На X определены сдвиг $T\colon X\to X$, $(T\mathbf{x})_k=x_{k+1}$, $k=0,1,2,\dots$, и мера Хаара μ_0, задающаяся равенством $\mu_0([a_0,\dots,a_{k-1}])=\frac{1}{2^k}$, $k=0,1,2,\dots$

Распределение случайного ряда ζ на X обозначим μ и будем называть его *мерой Эрдёша* (по аналогии с классической задачей Эрдёша). Мы рассматриваем вопрос, при каких условиях мера Эрдёша μ будет абсолютно непрерывна относительно меры Хаара μ_0 либо сингулярна с ней.

Пусть $\varphi_\xi(t)=\mathbf{E}e^{2\pi it\xi_k}$ – характеристическая функция ξ_k. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности меры Эрдёша относительно меры Хаара для случая, когда величины ξ_k принимают лишь конечное число значений.

Теорема 1. *Мера μ абсолютно непрерывна относительно μ_0 тогда и только тогда, когда для любого $m\in\mathbf{N}$ найдется такое $n\in\mathbf{N}$, что $\varphi_\xi(\frac{m}{2^n})=0$.*

T-инвариантную меру, относительно которой мера Эрдёша μ абсолютно непрерывна, будем называть it инвариантной мерой Эрдёша. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Инвариантная мера Эрдёша μ_∞ существует, единственна и эргодична относительно T.*

Обозначим инвариантную меру Эрдёша через μ_∞. Положим $p_n=\mathbf{P}\{\xi_k=n\}$, $n=0,1,2,\dots$; $F(n)=0$ для четных n и $F(n)=1$ для нечетных. Рассмотрим стационарную марковскую цепь $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$ с переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}\biggl\{\eta_{k+1}=\biggl[\frac{n}{2}\biggr]+j\biggm|\eta_k=n\biggr\}=p_j,\qquad k,n,j=0,1,2,\dots$$

Теорема 3. *Инвариантная мера Эрдёша является распределением случайного целого 2-адического числа $\sum_{k=0}^{\infty}F(\eta_k)\cdot 2^k$.*

Таким образом, μ_∞ соответствует функции от марковской цепи со счетным числом состояний. Если величины ξ_k принимают значения от 0 до M, $0\leqslant\xi_k\leqslant M$, то можно считать, что для η_k верно $0\leqslant\eta_k\leqslant 2M-1$, мера μ_∞ соответствует *скрытой марковской цепи.*

Мера Хаара μ_0 эргодична относительно T. Поскольку инвариантная мера Эрдёша μ_∞ также эргодична относительно T, то μ_∞ либо совпадает с μ_0, либо эти меры взаимно сингулярны. Необходимое и достаточное условие, сформулированное в теореме 1 дает, таким образом, критерий совпадения инвариантной меры Эрдёша и меры Хаара для случая, когда величины ξ_k принимают лишь конечное число значений.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 07-01-00203.