В. А. Ц а р ь к о в (Москва, БФГ-кредит). **О динамике Ферхюльста и динамике роста капитала в экономике.**

Динамика Ферхюльста описывает изменение численности популяции x_n в n-м году при нелинейном коэффициенте прироста R:

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}. \tag{1}$$

Ферхюльст считал, что численность популяции, заполняющей экологическую нишу, не может быть больше некоторого максимального значения (которое можно положить равным единице). В связи с этим он предположил, что R должен уменьшаться с ростом x_n пропорционально разности $R = r(1 - x_n)$, в результате получил:

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n - rx_n^2. \tag{2}$$

Зависимость оказалась необычайно сложной. Увеличение r приводило сначала к периодическим колебаниям популяции с определенным периодом. При дальнейшем увеличении параметра роста r период колебаний численности популяции начинал последовательно удваиваться. Наконец, увеличение r приводит к тому, что процесс изменения численности популяции становится непредсказуемым, несмотря на его изначальную детерминированность [1].

Нас же будет интересовать вопрос: «Могут ли наблюдаться подобные процессы в экономике?». Чтобы ответить на этот вопрос, исследовалась динамика роста капитала в процессе его расширенного воспроизводства.

Выбор модели роста капитала. Исходным допущением при конструировании блок-схемы динамической модели является непрерывный характер финансовых потоков. Капитал K_m в блок-схеме модели на рис. генерирует поток перенесенной стоимости продукции $y_{\text{пс}} = K_m/\tau_{\text{об}}$. Поток выручки связан с потоком себестоимости оператором с коэффициентом передачи $W = 1 + p_{\text{дс}}$. Коэффициент $p_{\text{дс}}$ — это, по существу, маржинальная рентабельность, равная $p_{\text{дс}} = (y_{\text{в}} - y_{\text{пс}})/y_{\text{пс}}$.

Поток добавленной стоимости $y_{\text{дс}} = y_{\text{в}} - y_{\text{пс}}$ преобразуется интегрирующим звеном с коэффициентом передачи $W = 1/s$ в пространстве изображений по Лапласу в добавленную стоимость $Y_{\text{дс}}$, полученную за период. Часть этого объема, равная доле $\beta_{\text{д}}$, суммируется с начальным капиталом K_0, увеличивая текущий капитал K_m.

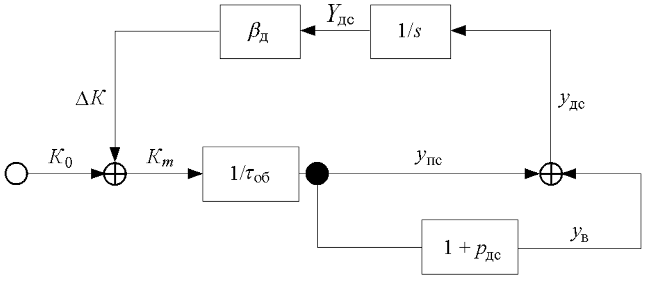

Рис. Обобщенная модель воспроизводства капитала в экономике

Особенностью модели является наличие контура положительной обратной связи, определяющее главное свойство модели: свойство саморазвития после подачи вектора начального капитала K_0.

Динамика роста капитала. Рост капитала определяется уравнением [2]:

$$K_m(t) = K_0 \exp\{\beta_{\text{д}} p_{\text{дс}}/\tau_{\text{об}}\}. \tag{3}$$

Капитал во временных $n = t/\tau_{\text{об}}$ точках, может быть вычислен по формуле

$$K_m(n) = K_0(1 + \beta_{\text{д}} p_{\text{дс}})^n. \tag{4}$$

Коэффициент прироста R для капитала, вычисляемого по формуле (4), равен

$$R = \frac{K_m(n+1) - K_m(n)}{K_m(n)} = \beta_{\text{д}} p_{\text{дс}}. \tag{5}$$

Очевидно, для экономической системы, функционирующей в рамках капиталистического рынка, как и для популяции в природе, имеется своя ниша и свой потолок роста. В связи с этим будем исходить из гипотезы, что доля капитализируемой добавленной стоимости будет уменьшаться пропорционально росту капитала,

$$\beta_{\text{д}} = (K_{\max} - K_m(n))/K_{\max}. \tag{6}$$

Подставив (6) в правую часть (5), после преобразования получим

$$\frac{K_m(n+1)}{K_{\max}} = (1 + p_{\text{дс}}) \frac{K_m(n)}{K_{\max}} - \left[\frac{K_m(n)}{K_{\max}}\right]^2 p_{\text{дс}}. \tag{7}$$

Введем новую переменную $x_n = K_m(n)/K_{\max}$, соответственно, $x_{n+1} = K_m(n+1)/K_{\max}$, после чего уравнение (7) можно записать в виде

$$x_{n+1} = (1 + p_{\text{дс}})x_n - (x_n)^2 p_{\text{дс}}. \tag{8}$$

Уравнение (8) идентично уравнению (2). Следовательно, динамика роста относительной величины x_n капитала будет аналогична нелинейной динамике Ферхюльста.

В зависимости от величины $p_{\text{дс}}$ динамика капитала будет претерпевать последовательно все качественные изменения, свойственные процессу для нелинейной динамики Ферхюльста. В системе с маржинальной рентабельностью, удовлетворяющей условию $0 < p_{\text{дс}} < 2$, траектория роста капитала стремится к равновесному состоянию. При $2 < p_{\text{дс}} < 2,499$ процесс начинает осциллировать. С увеличением $p_{\text{дс}}$ период колебаний начинает удваиваться и, наконец, при $p_{\text{дс}} > 2,57$ процесс становится хаотичным и непредсказуемым.

Подобные процессы с нелинейной динамикой относятся к математической теории фракталов. В [3] изложена гипотеза фрактального рынка. По аналогии назовем изложенные результаты *гипотезой фрактальной экономики*. Как следует из этой гипотезы, динамика роста капитала в экономике существенно меняется с увеличением величины $p_{\text{дс}}$. В пределах изменения $p_{\text{дс}}$ до 200% в экономике процессы саморегулируются. Однако при увеличении $p_{\text{дс}}$ парадигма саморегулируемой экономики не работает.

Гипотеза фрактальной экономики может существенно изменить сложившиеся представления о причинах циклических колебаний в экономическом развитии.

Для дальнейшего развития гипотезы фрактальной экономики необходимо преодолеть барьер одномерного измерения капитала и потоков ресурсов. Для этого потребуется представление капитала в форме комплексного числа на комплексной плоскости. Это позволит в полной мере использовать теорию комплексных динамических систем, описать с более общих позиций переход от порядка к хаосу и исследовать роль множества Мандельброта в экономической динамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993, 176 с.
2. *Царьков В. А.* Динамические модели экономики. — В сб.: Теория и практика экономической динамики. М.: ЗАО «Изд-во Экономика», 2007, 213 с.
3. *Петерс Э. Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: изд-во «Интернет–трейдинг», 2004, 304 с.