А. В. Шмаков (Москва, МГУЛ). **Определение параметров сходящейся сферической волны через полиномы Лежандра.**

В работе, представленной данным сообщением, изложена гидродинамическая часть нестационарной задачи гидроупругости сферической оболочки, заполненой идеальной сжимаемой жидкостью. Уравнения гидродинамики в сферической системе координат запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{2V}{r} + \frac{U}{r}\operatorname{ctg}\theta = 0. \qquad (1)$$

Здесь P — давление в жидкости; V, U — нормальная и тангенциальная скорость жидкости; r, t, θ — текущий радиус, время, угол. В качестве масштабов выбраны величины: $[P] = \rho a^2$, [V,U]=a, $[t] = R/a$, $[r] = R$, где ρ — плотность жидкости, a — скорость звука в жидкости, R — радиус. Решение системы (1) ищем в виде разложения в ряд Фурье по угловой координате:

$$V(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n Y_n(\cos\theta), \quad U(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n Y_n^1(\cos\theta), \quad P(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Y_n(\cos\theta),$$

$Y_n(\cos\theta)$, $Y_n^1(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра нулевого и первого порядка.

После исключения из третьего уравнения системы (1) скоростей V и U, для n-й гармоники ряда получим

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = -\frac{\partial P_n}{\partial r}, \quad \frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{1}{r}P_n, \quad \frac{\partial^2 P_n}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial P_n}{\partial r}\right) + \frac{n(n+1)}{r^2}P_n = 0. \qquad (2)$$

Система уравнений (2) относительно автомодельной переменной $z = (1-t)/r$ перепишется в виде

$$\frac{dV_n}{dz} = z\frac{dP_n}{dz}, \quad \frac{dU_n}{dz} = P_n, \quad (1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2} + n(n+1)P_n = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим сходящуюся акустическую волну, распространяющуюся от границы $r = 1$. Уравнение фронта сходящейся волны определяется соотношением $r+t-1 = 0$. Значениям $z > 1$ соответствуют точки перед фронтом, возмущения в которых равны нулю. Значение $z = 1$ соответствует фронту волны, значение давления и скорости на котором считается равным нулю. Для $|z| \leqslant 1$ и $n > 1$ решение системы уравнений (3) имеет вид:

$$P_n(z) = \frac{1}{a_n}(zY_N(z) - Y_{n-1}(z)), \quad V_n(z) = \frac{1}{b_n}(Y_n(z)(1+(n-1)z^2 - nzY_{n-1}(z)),$$
$$U_n(z) = \frac{1}{c_n}(Y_n(z)(n(n+1)(z^2-1) - 2nz^2) + 2nzY_{n-1}(z)),$$

где $a_n = n+1$, $b_n = (n+2)(n-1)$, $c_n = (n+2)(n+1)n(n-1)$, $Y_n(z)$ — полиномы Лежандра первого рода [2].

Следуя [1], решение системы (2) для $n > 1$ запишем в виде

$$P_n(r,t) = \int_0^{r+t-1} \frac{\omega_{pn}(\tau)}{a_n}(\xi_1 Y_n(\xi_1) - Y_{n-1}(\xi_1))\,d\tau, \quad \xi_1 = \frac{1-t+\tau}{r},$$
$$V_n(r,t) = \int_0^{r+t-1} \frac{\omega_{vn}(\tau)}{b_n}(Y_n(\xi_1)(1+(n-1)\xi_1^2) - n\xi_1 Y_{n-1}(\xi_1))\,d\tau, \qquad (4)$$
$$U_n(r,t) = \int_0^{r+t-1} \frac{\omega_{un}(\tau)}{c_n}(Y_n(\xi_1)(n(n+1)(\xi_1^2-1) - 2n\xi_1^2) + 2n\xi_1 Y_{n-1}(\xi_1))\,d\tau.$$

Неизвестные переходные функции $\omega_{pn}(\tau)$, $\omega_{vn}(\tau)$, $\omega_{un}(\tau)$ связаны между собой зависимостями, которые получаются после подстановки (4) в (2) для n-й гармоники разложения: $\omega_{vn}(\tau) = \omega_{un}(\tau) = -\omega_{pn}(\tau)$.

Для определения переходных функций используется граничное условие. В частности, если при $r = 1$ задан закон изменения нормальной составляющей скорости жидкости $V_n(1,t)$, то переходная функция $\omega_{vn}(\tau)$ определяется из интегральных уравнений для n-й гармоники:

$$\int_0^t \frac{\omega_{vn}(\tau)}{b_n}(Y_n(\xi)(1+(n-1)\xi^2 - n\xi Y_{n-1}(\xi))\,d\tau = V_n(1,t), \quad \xi = 1 - t + \tau. \tag{5}$$

В случае, если правая часть в уравнениях (5) является заданной функцией времени, то интегральное уравнение (5) решается один раз для всего интервала $|\xi| \leqslant 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов В. И.* Доклады АН СССР, 1937, т. 14, № 1.
2. *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977, 344 с.