

Л. С. Я р о с л а в ц е в а (Москва, МГУ). **Неклассические оценки точности приближения асимптотическими разложениями Бергстрёма в центральной предельной теореме.**

Неклассическими оценками в центральной предельной теореме (ЦПТ) называются оценки типа неравенства Берри–Эссеена, в которых абсолютные моменты заменяются на другие характеристики, отражающие близость распределения рассматриваемых случайных величин к нормальному закону. Примером таких характеристик являются псевдомоменты (см. ниже). Изучению неклассических оценок были посвящены работы ряда авторов (см., например, [1]–[4]). Однако в этих работах рассматривалась лишь точность приближения нормальным законом в ЦПТ. Автор настоящей заметки в [5] были получены неклассические оценки точности приближения короткими асимптотическими разложениями Эджеворта в ЦПТ. Здесь же представлены неклассические оценки точности приближения асимптотическими разложениями Бергстрёма произвольной длины.

Рассмотрим последовательность $X_1, \dots, X_n$ независимых случайных величин (с. в.) с нулевыми средними. Для $1 \leq k \leq n$ и $r \geq 3$ положим $\sigma_k^2 = \mathbf{E} X_k^2$, $\beta_{r,k} = \mathbf{E} |X_k|^r$, $\beta_r = \sum_{k=1}^n \beta_{r,k}$. Будем предполагать, что $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 > 0$ и $\beta_s < \infty$ для некоторого целого $s \geq 3$.

Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ — последовательность таких независимых с. в., что $Y_k \sim N(0, \sigma_k^2)$. Для $r \geq 3$ введем r -й псевдомомент с. в. X_k : $\nu_{r,k} = \int_{\mathbf{R}} |x|^r |F_k - \Phi_k|(dx)$, где F_k и Φ_k — функции распределения с. в. X_k и Y_k , соответственно, и положим $\nu_r = \sum_{k=1}^n \nu_{r,k}$. Для $i, p \in \mathbf{N}$ и $\mathbf{j} \in \mathbf{N}^p$ пусть $\ell! = l_1! \cdots l_p!$, $|\ell| = l_1 + \cdots + l_p$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,i} &= \{\ell \in \mathbf{N}^p : s \geq \ell_1 \geq 3, \dots, s \geq \ell_p \geq 3, |\ell| = 2p + i\}, \\ \mathcal{K}_{p,i} &= \{\ell \in \mathbf{N}^p : \ell_1 \geq \cdots \geq \ell_p \geq 3, |\ell| = 2p + i\}, \\ \mathcal{M}_p &= \{\mathbf{j} \in \mathbf{N}^p : 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n\}.\end{aligned}$$

Для $\ell \in \mathcal{L}_{p,i}$ и $\mathbf{j} \in \mathcal{M}_p$ обозначим

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{j}}(x) &= \Phi\left(x(1 - (\sigma_{j_1}^2 + \cdots + \sigma_{j_p}^2)/B_n^2)^{-1/2}\right), \\ Q_{\ell}^{\mathbf{j}} &= \left(\mathbf{E} X_{j_1}^{l_1} - \mathbf{E} Y_{j_1}^{l_1}\right) \cdots \left(\mathbf{E} X_{j_p}^{l_p} - \mathbf{E} Y_{j_p}^{l_p}\right).\end{aligned}$$

Пусть также

$$\begin{aligned}A_i(x) &= \frac{1}{B_n^i} \sum_{p=1}^i \sum_{\ell \in \mathcal{L}_{p,i}} \frac{1}{B_n^{2p} \ell!} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{M}_p} Q_{\ell}^{\mathbf{j}} (-\Phi_{\mathbf{j}})^{(|\ell|)}(x), \\ D_n^{(s)} &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{X_1 + \cdots + X_n}{B_n} < x \right\} - \Phi(x) - \sum_{i=1}^{s-2} A_i(x) \right|, \\ \theta_n &= \max_{1 \leq k \leq n} \sup_{|t| > B_n^3/(6\beta_3)} |\mathbf{E} \exp\{itX_k/B_n\}|.\end{aligned}$$

Теорема. *Существует такая постоянная $c(s)$, что*

$$\begin{aligned}D_n^{(s)} &\leq c(s) \left(\frac{1}{B_n^{s-1}} \sum_{p=1}^{s-1} \sum_{\ell \in \mathcal{K}_{p,s-1}} \frac{\nu_{l_1} \cdots \nu_{l_p}}{B_n^{2p}} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \sum_{i=1}^{s-2} \frac{1}{B_n^i} \sum_{p=1}^i \sum_{\ell \in \mathcal{K}_{p,i}} \frac{\beta_{l_1} \cdots \beta_{l_p}}{B_n^{2p}} \right) \left(\frac{\beta_3}{B_n^3} \right)^s + \theta_n^n \left(\frac{\beta_3}{B_n^3} \right)^{-1} \right).\end{aligned}$$

Следствие. В случае, когда $X_1, \dots, X_n$ распределены одинаково, справедлива оценка

$$D_n^{(s)} \leq c(s) \left(\frac{1}{n^{(s-1)/2}} \left(\frac{\nu_{s+1,1}}{\sigma_1^{s+1}} + \left(\frac{\nu_{s+1,1}}{\sigma_1^{s+1}} \right)^{3(s-1)/(s+1)} \right) + \frac{1}{n^{s/2}} \left(1 + \frac{1}{n^{(s-2)/2}} \left(\frac{\beta_{s+1,1}}{\sigma_1^{s+1}} \right)^{3(s-2)/(s+1)} \right) \left(\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3} \right)^s + \theta_n^n \sqrt{n} \left(\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3} \right)^{-1} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sazonov V. V., Ulyanov V. V. On the accuracy of normal approximation. — J. Multivar. Anal., 1982, v. 12, p. 371–384.
2. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem. — In: Proceedings of Second Japan–USSR Symp. Probab. Theory, Lect. Notes Math., 1968, v. 330, p. 531–543.
3. Паулаускас В. Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II. — Лит. Матем. Сб., 1969, v. 9, p. 791–815.
4. Ротарь В. И. Неклассические оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I, II. — Теория вероятн. и ее применен., 1977, v. 22, p. 774–790, 1978, v. 23, p. 55–66.
5. Ярославцева Л. С. Неклассические оценки точности приближения асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее применен., 2008, в печати.