

А. Д. Марковский (Москва, МГУЛ). **Неархимедовы метрики и псевдометрики в пространствах бесконечных цифровых кодов.**

На Седьмой Международной Петрозаводской конференции [1] сообщалось о существовании неизвестных ранее непрерывных кодирований чисел, ограничивающих перенос при сложении. Непрерывные кодирования позволяют «бесплатно» во много раз повысить быстродействие вычислений, открывают новые возможности хранения, обработки, передачи и защиты информации. Квалифицированное патентование структуры и различных способов непрерывных кодирований, их оперативная реализация в новых устройствах на основе нанотехнологий поставили бы соответствующую отечественную цифровую технику выше зарубежных аналогов.

Чтобы определить для кодирований такие структурные и практически значимые понятия, как «непрерывность», «линейная непрерывность», «ограниченность переноса», «равномерная ограниченность переноса» и сформулировать теоремы, связывающие основные понятия, необходимо наделить пространства бесконечных цифровых кодов неархимедовыми метриками. В отличие от неархимедовых метрик для полей p -адических чисел [2], востребованные метрики не индуцируются какими-либо нормами.

Далее будет рассмотрена общая теорема о неархимедовых метриках и псевдометриках в пространствах бесконечных цифровых кодов. Ее формулировке предшествуют определения этих пространств, их «метризуемых» подпространств и ключевых понятий «порядков» и «порядков пар» для бесконечных кодов, обеспечивающих возможность метризации. Смысл вводимых определений проясняется предварительным рассмотрением «стандартных» кодирований чисел с помощью a -ичных систем счисления.

Пусть $a \in \{2, 3, \dots\}$. Представим произвольное $x \in \mathbf{R}$ в «нормализованном» виде:

$$x = s m a^p, \quad s \in \{-1, 1\}, \quad m \in [1, a), \quad (1)$$

где $p \in \mathbf{Z}$ при $x \neq 0$, $p := -\infty$ при $x = 0$. Число $p = p_a(x) = \{-\infty\} \cup \mathbf{Z}$, однозначно определенное (1), называется a -ичным порядком $x \in \mathbf{R}$.

Представим теперь число $x \in \mathbf{R}$ в a -ичной системе счисления в самой удобной для записи общей форме, содержащей «бесконечное в обе стороны» число слагаемых:

$$x = s(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k(x) a^k, \quad (2)$$

где $\alpha_k(x) \in \{0, 1, \dots, a-1\}$ — a -ичные цифры, $s(x) \in \{-1, 1\}$ — знак x . Представление (2) числа x будет единственным, если потребовать, чтобы для любого $m \in \mathbf{Z}$ нашлось такое $k \in \mathbf{Z}$, $k < m$, для которого $\alpha_k(x) \neq a-1$.

Таким образом, каждому числу $x \in \mathbf{R}$ сопоставляется единственный бесконечный стандартный a -ичный код $M_a(x) = \{\alpha_k(x) \in \{0, 1, \dots, a-1\} | k \in \mathbf{Z}\}$ со знаком $s(x) \in \{-1, 1\}$. Если $x = 0$, то $M_a(x) = M_a(0) = \{\alpha_k = 0 \text{ для всех } k \in \mathbf{Z}\}$ — нулевой стандартный код. Если $x \neq 0$, то число $p_a(M_a(x)) := \max\{k \in \mathbf{Z} | \alpha_k(x) \neq 0\}$ называется a -ичным порядком стандартного a -ичного кода $M_a(x)$. Ясно, что $p_a(M_a(x)) = p_a(x)$, $p_a(M_a(0)) := -\infty$.

Если основание системы счисления $a \in \{-2, -3, \dots\}$ отрицательно, то любое число $x \in \mathbf{R}$ представимо в виде

$$x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k(x) a^k. \quad (3)$$

Такое представление единственно, когда для любого $m \in \mathbf{Z}$ найдется такое $k \in \mathbf{Z}$, $k < m$, для которого $\alpha_{2k-1}(x) \neq a-1$ и $\alpha_{2k}(x) \neq 0$. Существенное преимущество

представления (3) по сравнению с (2) в том, что оно сопоставляет каждому числу $x \in \mathbf{R}$ a -ичный код *без знака*. В этом случае $p_a(M_a(x)) \geq p_{|a|}(M_{|a|}(x)) = p_{|a|}(x)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть A — произвольное непустое множество, элементы которого называются *цифрами*, одна из которых обозначена символом O и называется *нулем*. Для любого $k \in Z$: $A_k \subset A$ — произвольные непустые подмножества множества A , называемые *k -ми разрядами*.

Прямое произведение всех разрядов $K = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} A_k$ называется *пространством бесконечных цифровых кодов* или *бесконечной разрядной сеткой*. Любой элемент пространства K называется *бесконечным цифровым кодом*, т. е. бесконечный цифровой код — это последовательность $X = \{\alpha_k \in A_k | z \in Z\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Нулевой бесконечный код $\bar{O} = \{\alpha_k = 0 \text{ для всех } k \in Z\}$.

Код $X \in K$ называется *действительным*, если существует $p_+(X) = \max\{k \in Z | \alpha_k \neq 0\}$ или $X = \bar{O}$; $p_+(0) = -\infty$. Число $p_+(x)$ называется *порядком действительного кода X* .

Код $X \in K$ называется *адическим*, если существует $p_-(X) = \min\{k \in Z | \alpha_k \neq 0\}$ или $X = \bar{O}$; $p_-(0) = +\infty$. Число $p_-(x)$ называется *порядком адического кода X* .

Код $X \in K$ называется *конечно представимым*, если он одновременно действительный и адический. В частности, $\bar{O}$ — конечно представимый код.

Множество $K_+ \subset K$ всех действительных кодов и множество $K_- \subset K$ всех адических кодов будем называть *пространствами* действительных и адических кодов.

О п р е д е л е н и е 3. Порядком пары (X, Y) действительных кодов $X = \{\alpha_k \in A_k | k \in Z\}$ и $Y = \{\beta_k \in A_k | k \in Z\}$ называется число $p_+(X, Y) := \max\{k \in Z | \alpha_k \neq \beta_k\}$ при $X \neq Y$; $p_+(X, X) = -\infty$.

Если X и Y — адические коды, то порядок пары $p_-(X, Y) = \min\{k \in Z | \alpha_k \neq \beta_k\}$ при $X \neq Y$; $p_-(X, X) = +\infty$.

Теорема 1. Пусть D — произвольное множество, удовлетворяющее условию $Z \subset D \subset \mathbf{R}$, $D_+ := \{-\infty\} \cup D$, $D_- = D \cup \{+\infty\}$. Пусть далее функция $\varphi_+ : D_+ \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $\varphi_+(-\infty) = 0$ и возрастает, т. е. для любых $x \in D_+$ и $y \in D_+$: $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$, а функция $\varphi_- : D_- \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $\varphi_-(+\infty) = 0$ и убывает.

Тогда каждая из функций $d_+(X, Y) = \varphi_+(p_+(X, Y))$ и $d_-(X, Y) = \varphi_-(p_-(X, Y))$ является неархимедовой псевдометрикой соответственно в пространстве действительных кодов K_+ и пространстве адических кодов K_- , т. е. для любых $\delta \in \{-, +\}$ и $X, Y, U \in K_\delta$ выполняются свойства:

$$d_\delta(X, Y) = 0, \quad (4)$$

$$d_\delta(X, Y) = d_\delta(Y, X), \quad d_\delta(X, U) \leq d_\delta(X, Y) + d_\delta(Y, U), \quad (5)$$

$$d_\delta(X, U) \leq \max\{d_\delta(X, Y), d_\delta(Y, U)\}. \quad (6)$$

Теорема 2. Если в условии теоремы 1 потребовать, что функция $\varphi_+(x)$ строго возрастает, т. е. для всех $x, y \in D_+$: $x < y \Rightarrow \varphi_+(x) < \varphi_+(y)$, а функция $\varphi_-(x)$ строго убывает, то каждая из псевдометрик $d_+(X, Y)$ и $d_-(X, Y)$ станет неархимедовой метрикой соответственно в пространстве K_+ и пространстве K_- , т. е. при сохранении свойств (5) и (6) свойство (4) перейдет в более сильное: $d_\delta(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марковский А. Д. Непрерывные кодирования чисел, ограничивающие перенос при сложении. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 562–563.
2. Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. М.: Библиотечка, 1997.