

И. И. Голицhev (Уфа, ИМ с ВЦ УНЦ РАН). **О единственности и итерационном методе решения нелинейной нестационарной задачи с нелокальными краевыми условиями.**

В работе, представленной данным сообщением, получаем итерационный метод решения начально краевой задачи с нелокальными краевыми условиями. В частности, такими задачами описывается нестационарный процесс теплообмена излучением. Единственность и сходимость итерационного процесса устанавливаются в условиях существования гладкого решения задачи. Глобальная разрешимость такого рода задач устанавливается в работе [1].

Рассматривается задача

$$Lu \equiv \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + b(x, t, u, u_x) = f(x, t), \quad (x, t) \in S, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L^{(s)}(u) &\equiv a_{ij}(x, t, u) u_{x_j} \cos(n, x_j) + d(x, t, u) u + h(x, t) \\ &- \int_{\partial G} h(u(\xi, t)) \varphi(\xi, x, t) d\xi = g(x, t), \quad (x, t) \in S, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in G. \quad (3)$$

Здесь $Q = G \times [0, T]$, $S = \partial G \times (0, T)$, G — ограниченная гладкая область в $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$), ∂G — ее граница.

Изучается сходимость итерационного процесса в метрике пространства $V_2^{1,0} = L_2(0, T; W_2^1(G)) \cap C([0, T], L_2(G))$:

$$L_0 u_{k+1} = L_0 P u_k - L(P u_k) + f, \quad (x, t) \in Q, \quad (4)$$

$$L_0^{(s)} u_{k+1} = L_0^{(s)} P u_k - L^{(s)}(P u_k) + g, \quad (x, t) \in S, \quad (5)$$

$$u_{k+1}(x, 0) = u^0(x), \quad (6)$$

где

$$L_0 u = \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \mu_2 u, \quad L_0^{(s)} u = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) + \mu_3 u,$$

μ_1, μ_2, μ_3 — параметры метода, P — оператор проектирования на множество функций, ограниченных снизу и сверху числами N_1 и N_2 .

Предполагается, что существует решение задачи (1)–(3) $u(x, t) \in C^0(\overline{Q})$, $u(x, t) \in [N_1, N_2]$ для любого $(x, t) \in \overline{Q}$, функции $a_{ij}(x, t, u)$, $b(x, t, u, w)$, $d(x, t, u)$, $h(u)$ по условию Липшица при всех $(x, t) \in Q$ и $u \in [N_1, N_2]$, кроме того, функция $b(x, t, u, w)$ удовлетворяет условию по w на $\mathbf{R}^n$. Относительно функции φ предполагается, что $\varphi(\xi, x, t) \in L_1(\partial G \times \partial G \times [0, T])$, $\varphi(\xi, x, t) = \varphi(x, \xi, t)$ и, кроме того, $\tilde{\varphi}(\xi, t) = \int_{\partial G} |\varphi(\xi, x, t)| dx \leq c$; $u^0 \in L_2(G)$, $f \in L_2(Q)$, $g \in L_2(S)$. Доказывается, что при сделанных предположениях при $\mu_1 = (m + M)/2$ и любых $\mu_2, \mu_3 \geq 0$ итерационный процесс (4)–(5) сходится к решению задачи (1)–(3) в пространстве $V_2^{1,0}$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $Q + \varepsilon$, $Q = (M - m)(M + m)$ и решение u единственно в $V_2^{1,0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А. А. Глобальная разрешимость одной переменной нестационарной задачи с нелокальными краевым условием типа теплообмена излучением. — Дифференциальные уравнения, 2005, т. 41, № 1, с. 93–104.