

В. А. И в н и ц к и й, А. Б. К а с у м о в (Москва, ВНИИЖТ, БПИ).
Нестационарные математические ожидания числа «нетерпеливых» требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания с возможностью обхода.

В работе, представленной данным сообщением, для нестационарных математических ожиданий количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания (ЗСеМО) с возможностью обхода ими узлов находится система линейных дифференциальных уравнений первого порядка размерности, равной числу узлов сети без одного, и устанавливаются необходимые и достаточные условия ее существования. Для решения задачи применяется метод стохастических разностных уравнений [1], являющийся обобщением метода «динамики средних», предложенного в [2].

Пусть в ЗСеМО имеется m узлов и циркулирует N требований. Длительность обслуживания в i -м узле ξ_i имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i . Все N требований являются «нетерпеливыми». Время их пребывания в i -м узле ограничено случайной величиной γ_i , имеющей экспоненциальное распределение с параметром α_i . Если у требования, которое обслуживается в i -м узле, $\xi_i < \gamma_i$, то требование завершает свое обслуживание. После завершения обслуживания в i -м узле это требование с вероятностью P_{ij} поступает на обслуживание в j -й узел, $\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1$, и с вероятностью $f(j)$ начинает сразу обслуживаться, а с вероятностью $1 - f(j)$ уходит из узла, считаясь обслуженным (т.е. у него время обслуживания с вероятностью 1 равно нулю). Матрица $(P_{ij})_{m \times m}$ неразложима. Число каналов обслуживания в каждом узле равно N , т.е. ожидания обслуживания нет.

Если у требования, которое обслуживается в i -м узле, $\xi_i > \gamma_i$, то требование в момент γ_i после начала обслуживания покидает i -й узел и с вероятностью $\bar{P}_{ij}$ поступает на обслуживание в j -й узел, $\sum_{j=1}^m \bar{P}_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, m$, и с вероятностью $\bar{f}(j)$ начинает сразу обслуживаться, а с вероятностью $1 - \bar{f}(j)$ уходит из узла, считаясь обслуженным (т.е. у него время обслуживания с вероятностью 1 равно нулю). Матрица $(\bar{P}_{ij})_{m \times m}$ также неразложима. В момент времени $t = 0$ в i -м узле находится на обслуживании $n_i(0)$ требований, $\sum_{i=1}^m n_i(0) = N$. Обозначим $\nu_i(t)$ число требований в i -м узле в момент t , $M \nu_i(t) = n_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $\nu_i(t)$ является случайным процессом. Случайный процесс $\zeta_i = \{\nu_i(t), \dots, \nu_m(t)\}$ является марковским. Требуется определить $n_i(t)$.

Теорема. Для того чтобы функции $n_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, для ЗСеМО с «нетерпеливыми» требованиями и возможностью обхода ими узлов определялись следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$n'_i(t) = -n_i(t)(\mu_i(1 - \beta_{ii}) + \alpha_i(1 - \bar{\beta}_{ii}) + \mu_m \beta_{mi} + \alpha_m \bar{\beta}_{mi}) + \sum_{j=1, j \neq i}^{m-1} n_j(t)(\mu_j \beta_{ji} + \alpha_j \bar{\beta}_{ji}) - \mu_m \beta_{mj} - \alpha_m \bar{\beta}_{mj}) + N(\mu_m \beta_{mi} + \alpha_m \bar{\beta}_{mi}), \quad i = 1, \dots, m-1, \quad n_m(t) = N - \sum_{i=1}^{m-1} n_i(t), \quad (1)$$

с произвольными начальными условиями $n_i(0) = n_i^{(0)}$, где $\beta_{ij} = \sum_{k=1}^m P_{ik} \psi_{kj}$, $\psi_{ij} = f(i) \delta_{ij} + (1 - f(i)) \sum_{k=1}^m P_{ik} \psi_{kj}$, $\bar{\beta}_{ij} = \sum_{k=1}^m \bar{P}_{ik} \bar{\psi}_{kj}$, $\bar{\psi}_{ij} = \bar{f}(i) \delta_{ij} + (1 - \bar{f}(i)) \sum_{k=1}^m \bar{P}_{ik} \bar{\psi}_{kj}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, \dots, m$, необходимо и достаточно выполнения условий:

- 1) времена обслуживания и пребывания требований в различных узлах должны быть взаимно независимыми и иметь экспоненциальные распределения;
- 2) параметры этих распределений не должны зависеть от состояния ЗСеМО и ее узлов;
- 3) в узлах сети должны отсутствовать очереди;

4) параметры P_{ij} , ψ_{ij} , $\bar{P}_{ij}$, $\bar{\psi}_{ij}$, $f(i)$, $\bar{f}(i)$, $i, j = 1, \dots, m$, не должны зависеть от состояния сети и узлов.

З а м е ч а н и е. В общем случае, когда распределения P_{ij} и $\bar{P}_{ij}$, $i, j = 1, \dots, m$, не совпадают, даже в стационарном случае нет замкнутого аналитического решения для вероятностей состояний рассматриваемой ЗСеМО.

Обозначим $\tilde{n}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} n_i(t) dt$, $i = 1, \dots, m$. Применяя к системе уравнений (1) преобразование Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} & (s + \mu_i(1 - \beta_{ii}) + \alpha_i(1 - \bar{\beta}_{ii}) + \mu_m\beta_{mi} + \alpha_m\bar{\beta}_{mi})\tilde{n}_i(s) \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^{m-1} \tilde{n}_j(s) (\mu_j\beta_{ji} + \alpha_j\bar{\beta}_{ji} - \mu_m\beta_{mi} - \alpha_m\bar{\beta}_{mi}) + Ns^{-1}(\mu_{mi}\beta_{mi} \\ &+ \alpha_{mi}\bar{\beta}_{mi}) + n_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad \tilde{n}_m(s) = s^{-1}N - \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{n}_i(s). \quad (2) \end{aligned}$$

Система уравнений (2) является системой линейных алгебраических уравнений и может решаться известными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивницкий В. А., Ивницкий О. В.* Нахождение нестационарных математических ожиданий количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутых марковских сетей массового обслуживания. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 304–305.
2. *Вентцель Е. С.* Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964, 388 с.