

А. А. Коршунова (Москва, МГУ). **Возникновение градиентной катастрофы для частного решения системы Навье–Стокса.**

Рассмотрим следующую систему уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \rho + \rho (\nabla, \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \rho \Delta \mathbf{v} + \rho L \mathbf{v},$$

где $L = [0, l, 0; -l, 0, 0; 0, 0, 1]$ — постоянная матрица, $l = \text{const}$ — параметр Кориолиса.

Решение ищется в виде

$$\mathbf{v} = (\dot{\alpha}(t)x + \dot{\gamma}(t)y, \dot{\xi}(t)x + \dot{\beta}(t)y, W(t, x, y))^T,$$

где $W(t, x, y) = \omega_1(t)x + \omega_2(t)y + \omega_3(t)$ — линейная функция по x и y , и $\rho(t, x) = \sigma(t) + [\rho_0/U](\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t))x$. Аналогичная задача при $l = 0$ решалась в статье В.К. Shivamoggi «Vortex Stretching and Reconnection in a Compressible Fluid» (arXiv:physics/0509200). Например, при $\sigma(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) \neq 0$, $\dot{\beta}(0) \neq 0$ и $\dot{\gamma}(0) = 0$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \frac{\rho_0}{U} \frac{C_2(t + C_1)^2}{(t + C_1)(C_2(t + C_1)^2 - 1)} x, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{x}{(t + C_1)(C_2(t + C_1)^2 - 1)}, \\ \mathbf{v}_2 &= \left(\frac{(2\dot{\xi}(0) - l)\sqrt{|C_2 C_1^2 - 1|}}{2\sqrt{|C_2(t + C_1)^2 - 1|}} + \frac{l}{2} \right) x + \frac{1}{t + C_1} y, \quad \mathbf{v}_3 = \left(C_3(t + C_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_2(t + C_1)}{2\sqrt{|C_2(t + C_1)^2 - 1|}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{|C_2|(t + C_1)}} - \frac{1}{t + C_1} \right) x + \frac{\omega_2(0)}{t + C_1} y + \omega_3(0), \end{aligned}$$

где C_i ($i = 1, 2, 3$) — константы, зависящие от начальных данных. Введем обозначение

$$T = -(\dot{\beta}(0))^{-1}, \quad T_{\pm} = \pm \frac{1}{\dot{\beta}(0)} \left(\sqrt{\frac{\dot{\alpha}(0)}{\dot{\alpha}(0) + \dot{\beta}(0)}} \mp 1 \right).$$

Теорема. Пусть $\sigma(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) \neq 0$, $\dot{\beta}(0) \neq 0$ и $\dot{\gamma}(0) = 0$. Тогда:

- 1) при $\dot{\beta}(0) > 0$ и $\dot{\alpha}(0) > -\dot{\beta}(0)$ градиент скорости остается ограниченным;
- 2) при $\dot{\beta}(0) < 0$ и $0 < \dot{\alpha}(0) < -\dot{\beta}(0)$ градиент скорости обращается в бесконечность в момент времени T , а при $\dot{\beta}(0) > 0$ и $\dot{\alpha}(0) < -\dot{\beta}(0)$ — в T_+ ;
- 3) при $\dot{\beta}(0) < 0$ и $\dot{\alpha}(0) > -\dot{\beta}(0)$ градиент скорости обращается в бесконечность в двух точках: T и T_+ ($T_+ < T$);
- 4) при $\dot{\beta}(0) < 0$ и $\dot{\alpha}(0) < 0$ градиент скорости обращается в бесконечность в трех точках: T , T_+ и T_- ($T_+ < T < T_-$).

Из явного вида построенных решений видно, что для них не выполнены законы сохранения. Но эти решения можно рассматривать в ограниченной области. Одной из особенностей данных классов решений (с линейной третьей компонентой вектора скорости) является их независимость от коэффициента динамической вязкости μ . Также из приведенной в данном сообщении теоремы можно заключить, что параметр Кориолиса не оказывает влияние на время образования градиентной катастрофы, хотя явный вид решения изменяется.