

М. С. Т и х о в, Д. С. К р и ш т о п е н к о (Нижний Новгород, ННГУ).
Тестирование монотонности функции эффективности в зависимости доза–эффект.

Рассматривается зависимость доза–эффект в постановке, изложенной в [1], где важную роль играет функция эффективности $\mathbf{E}(W|U = x) = m(x)$, U — вводимая случайная доза, $W = I\{X < U\}$, X — изучаемая случайная величина. Если X и U независимы, то $m(x) = F(x) = \mathbf{P}\{X < x\}$ есть функция распределения, которая является монотонной функцией x . Однако обычно используемая классическая оценка Надарая–Ватсона функции $m(x)$ может и не быть монотонной как в случае зависимых величин X и U , так и в случае их независимости.

В докладе рассматриваются монотонные оценки функции $m(x)$. Конструкция этих оценок использует идеи статьи [2], т. е. сначала строится оценка Надарая–Ватсона для функции $m(x)$:

$$\hat{m}(x) = \sum_{i=1}^N W_i K_r \left(\frac{x - U_i}{h_r} \right) / \sum_{i=1}^N K_r \left(\frac{x - U_i}{h_r} \right)$$

по выборке (U_i, W_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, где $K_r(x)$ — ядро, $h_r \rightarrow 0$, $Nh_r \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$).

Далее, в качестве монотонных оценок берутся статистики

$$\varphi_{h_d}^{(I)} = \frac{1}{h_d} \int_0^1 \int_{-\infty}^t K_d \left(\frac{m(v) - u}{h_d} \right) du dv, \quad \varphi_{h_d}^{(A)} = \frac{1}{h_d} \int_0^1 \int_t^\infty K_d \left(\frac{m(v) - u}{h_d} \right) du dv.$$

Если случайные величины $U_1, U_2, \dots, U_N$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$ и на этом же отрезке функция $m(x)$ строго возрастает (убывает), то статистика $\varphi_{h_d}^{(I)}(t)$ ($\varphi_{h_d}^{(A)}(t)$) является состоятельной оценкой $m^{-1}(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

Пусть

$$T_N^{(I)} = \int_0^1 (\varphi_{h_d}^{(I)}(\hat{m}(x)) - x)^2 dx, \quad T_N^{(A)} = \int_0^1 (\varphi_{h_d}^{(A)}(\hat{m}(x)) - x)^2 dx,$$

$$T^{(I)} = \int_0^1 \left(\int_0^1 I\{m(v) \leq m(x)\} dv - x \right)^2 dx,$$

$$T^{(A)} = \int_0^1 \left(\int_0^1 I\{m(v) \geq m(x)\} dv - x \right)^2 dx.$$

Показано, что при $N \rightarrow \infty$ величины $T_N^{(I)}$ и $T_N^{(A)}$ сходятся по вероятности соответственно к $T^{(I)}$ и $T^{(A)}$. Установлена также асимптотическая нормальность этих величин. Последнее позволяет строить критерии проверки следующей гипотезы: функция эффективности строго возрастает (строго убывает). Критерий основан на следующем факте: если функция $m(x)$ непрерывна, то величина $T^{(I)}$ ($T^{(A)}$) равна 0 тогда и только тогда, когда $m(x)$ строго возрастает (строго убывает) на интервале $[0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихов М. С., Криштопенко Д. С. Асимптотические распределения суммируемых квадратичных уклонений оценок функции распределения в зависимости доза–эффект. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 4, с. 666—669.
2. Dette H., Neumeyer N., Pilz K. F. A simple nonparametric estimator of a monotone regression function. — Bernoulli, 2006, v. 12, p. 469–490.