

В. Н. Л е с е в (Нальчик, КБГУ). **Нелинейная математическая модель гравитационного растекания капли по твердой поверхности.**

Рассмотрим задачу о растекании капли нелетучей жидкости по горизонтальной поверхности. В приближении теории смазки уравнения движения записываются в виде

$$\frac{\partial(P+F)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial(P+F)}{\partial y} = -\rho g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где μ, ρ — динамическая вязкость и плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, $P(x, y), u(x, y), v(x, y)$ — давление, горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, $F(x, y)$ — потенциальная энергия взаимодействия молекул произвольной точки жидкой пленки, рассчитанная на единицу объема.

Дополним (1) условиями

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial v} = v, \quad p = p_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = h(x, t) \quad (2)$$

и

$$u = U, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (3)$$

где p_0 — внешнее давление, t — время, U — скорость скольжения.

Определяя функцию тока $\psi(x, y, t)$ так, что $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$, из (1)–(3) будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial(P+F)}{\partial x} - U h \right]. \quad (4)$$

Уравнение (4) для случая $F = 0$ и $U = 0$ исследовано в работах [1], [2].

Остановимся на случае, когда только $F = 0$. Тогда уравнение (4) в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial h}{\partial x} - \beta x_0(t) h \right] = 0, \quad (5)$$

где α, β — константы, а $x_0(t)$ — радиус растекания капли.

Введем условие сохранения объема

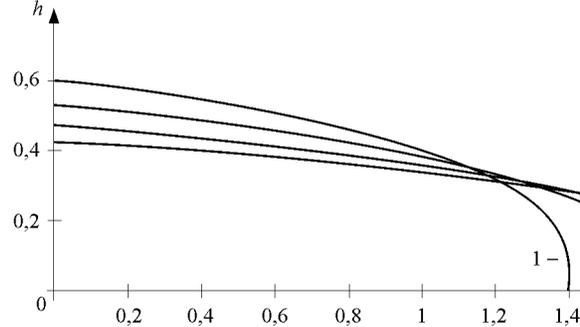
$$\int_0^{x_0(t)} h(x, t) dx = S, \quad (6)$$

где $S = \text{const}$ — половина площади сечения капли.

Задача (5), (6) допускает точное автомодельное решение в виде $h = h(\xi)$, где $\xi = x - x_0(t)$, а $\dot{x}_0(t) = v$ — скорость растекания. При этом имеем

$$h(\xi) = \left[\frac{3(\alpha\beta - 1)}{\alpha} \right] v^{1/3} \xi^{1/3}, \quad x_0^5(t) = \frac{320\alpha}{81(1 - \alpha\beta)} t. \quad (7)$$

Безразмерный профиль капли, рассчитанный на основе (7) в пакете Mathcad для



различных моментов времени t , представлен на рис.

Рис. Безразмерный профиль капли для различных моментов времени: (1 — $x_0(t) = 1,4$, 2 — $x_0(t) = 1,6$, 3 — $x_0(t) = 1,8$, 4 — $x_0(t) = 2$)

Отметим также, что, располагая аналитическими решениями, описывающими форму профиля капли, на основе динамических методов [3] можно определить не только поверхностное натяжение, но и динамическую вязкость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быховский А. И.* Растекание. Киев: Наукова Думка, 1983.
2. *Калинин В. В., Старов В. М.* О квазистационарном подходе к решению задач растекания жидкости. — Коллоид. журн., 1992, т. 54, № 2, с. 90.
3. *Paradis P. F., Ishikawa T., Yoda S.* Int. J. of Thermophysics, 2003, v. 24, p. 239.