

А. В. Геренштейн, Н. Машрабов (Челябинск, ЮУрГУ, ЧГАУ). **Нагревание круга движущимся теплоисточником.**

Если на границе круга имеется движущийся тепловой источник, то для решения уравнения теплопроводности с целью изучения тепловых полей удобно рассматривать вращающуюся систему координат с постоянной угловой скоростью ω . Тогда уравнение теплопроводности примет вид (коэффициенты и переменные безразмерны)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (1)$$

В этом случае для устойчивости явной численной схемы уравнения (1) приходим к линейному уравнению в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_{ik} - \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{u}_{ik} + \mu \bar{u}_{ik} = f_{ik}, \quad (2)$$

где

$$f_{ik} = \left(\frac{2r_i + h}{2r_i} u_{i+1,k} + \frac{2r_i - h}{2r_i} u_{i-1,k} \right) \frac{1}{h^2} + \frac{u_{i,k-1} + u_{i,k+1}}{(r_i \alpha)^2}, \quad \mu = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{(r_i \alpha)^2}.$$

Предполагается, что для каждого значения r правая часть f_{ik} является функцией (разумеется, известной) аргумента φ . Индекс i означает номер узла сетки по радиусу, индекс k — номер узла сетки по углу. В выражении (2) черта над функцией u означает ее значение на следующем временном слое. Отсутствие черты означает вычисленное значение той же функции на предыдущем временном слое.

Решение уравнения (2) (явная схема) имеет вид

$$\bar{u}_{ik} = u(\varphi + \omega \tau) e^{-\mu \tau} + \int_0^\tau e^{-\mu \varphi} f(\varphi + \omega s) d\varphi. \quad (3)$$

Здесь $u(\varphi + \omega \tau)$ означает узлы (i, k) сетки, при которых $u_{ik} = u(\varphi + \omega \tau)$, т.е. значение $\varphi + \omega \tau$ попадает в узел (i, k) . Аналогичный смысл имеет выражение $f(\varphi + \omega s)$.

Таким образом, выражение (3) задает явную устойчивую схему для уравнения теплопроводности во вращающейся с угловой скоростью ω полярной системе координат. Интеграл в правой части (3) предполагает численное интегрирование заданных в узлах сетки функции. Данная схема реализована в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геренштейн А. В., Машрабов Н., Геренштейн Е. А. Расчет температурных полей в цилиндре при действии поверхностных тепловых источников «Тепло 4.0». Государственная регистрация в Отраслевом фонде алгоритмов и программ № 9776, 20.02.2008. М.: ФГНУ ГКЦИТ, 2008.